# 10　2次方程式の応用

## 70　文字の値に関する問題

2次方程式 $x^2+(a-5)x-2a=0$ の1つの解が3であるとき，$a$ の値と他の解を求めよ。

解　$x^2+(a-5)x-2a=0$ に $x=3$ を代入すると，

$3^2+(a-5)\times3-2a=0$，$9+3a-15-2a=0$，$\boldsymbol{a=6}$

よって，2次方程式は $x^2+x-12=0$ となる。

これを解くと，$x=3$，$-4$ だから，他の解は $\boldsymbol{x=-4}$

---

2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が3と $-8$ であるとき，$a$，$b$ の値を求めよ。

解　$x=3$ を解にもつから，$3^2+3a+b=0$，すなわち，$3a+b=-9$…①

また，$x=-8$ を解にもつから，$(-8)^2-8a+b=0$，すなわち，$8a-b=64$…②

$a$，$b$ についての連立方程式①，②を解くと，$\boldsymbol{a=5}$，$\boldsymbol{b=-24}$

〔別解〕　2つの解が3と $-8$ である2次方程式は，$(x-3)\{x-(-8)\}=0$

左辺を展開すると，$x^2+5x-24=0$

よって，$\boldsymbol{a=5}$，$\boldsymbol{b=-24}$

**222**　次の問いに答えよ。

□(1)　2次方程式 $x^2+ax-20=0$ の解の1つが4であるとき，$a$ の値と他の解を求めよ。

□(2)　2次方程式 $x^2+(a+3)x-2a+1=0$ の1つの解が3であるとき，$a$ の値と他の解を求めよ。

□(3)　$x$ の2次方程式 $2x^2+ax-a^2=0$ が $-2$ を解にもつとき，$a$ の値を求めよ。

□(4)　2次方程式 $x^2+x-2a-2=0$ の解の1つが $a$ であるとき，$a$ の値と他の解を求めよ。

□(5)　2次方程式 $x^2+2x-a=0$ の解の1つが $-1+\sqrt{13}$ のとき，$a$ の値を求めよ。

□(6)　2つの2次方程式 $x^2+ax+a+3=0$，$x^2-7x+12=0$ が共通の解を1つもつとき，$a$ の値を求めよ。

□(7)　$x$ の2次方程式 $x^2+x-2a^2=0$ と $x^2-a^2x-a+1=0$ がともに $x=1$ を解にもつ。このとき，$a$ の値を求めよ。

応□(8)　$x$ の2次方程式 $x^2-8x+3a=0$ の解のうちの1つから2をひいたものが $a$ であるという。このとき，$a$ の値を求めよ。

**223**　次の問いに答えよ。

□(1)　$x$ の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が4と $-5$ であるとき，$a$，$b$ の値を求めよ。

□(2)　$x$ の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が9と $-3$ であるとき，$a$，$b$ の値を求めよ。

□(3)　$x$ の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解に，それぞれ2を加えた数は，2次方程式 $x^2+3x-54=0$ の解になるという。$a$，$b$ の値を求めよ。

□(4)　$x$ の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解に，それぞれ2をかけた数は，2次方程式 $x^2-12x+32=0$ の解になるという。$a$，$b$ の値を求めよ。

## 71　数に関する問題

和が5，積が $-3$ となる2つの数を求めよ。

解　求める2つの数の一方を $x$ とおく。和が5であるから，もう一方の数は $5-x$ と表される。

これらの積が $-3$ であるから，$x(5-x)=-3$，$x^2-5x-3=0$

これを解いて，$x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

$x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$ のとき，$5-x=5-\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$

$x=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$ のとき，$5-x=5-\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

したがって，求める2つの数は，$\boldsymbol{\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}}$ と $\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}}$

**224**　次の問いに答えよ。

□(1)　和が $-7$，積が4となる2つの数を求めよ。

□(2)　積が42となるような連続する2つの整数を求めよ。

□(3)　ある数から3をひいて2乗したら，もとの数の5倍より3小さくなった。もとの数を求めよ。

□(4)　ある正の整数 $x$ の2乗を，$x$ より3大きい数でわると，商が6で余りが9になる。$x$ の値を求めよ。

□(5)　連続する2つの自然数の平方の和が221である。この2つの自然数を求めよ。

□(6)　負の数 $x$ を2乗するところを間違えて2倍したら，正しい答より7小さくなった。$x$ の値を求めよ。

## 72　公式に関する問題

$n$ 角形の対角線は，$\dfrac{1}{2}n(n-3)$ 本引ける。対角線が44本ある多角形を求めよ。

解　$\dfrac{1}{2}n(n-3)=44$，$n(n-3)=88$，$n^2-3n-88=0$，$n=-8$，$11$

$n$ は自然数で，$n\geqq3$ だから，$n=-8$ は問題に適していない。$n=11$ は問題に適している。

よって，**十一角形**

〔注〕　$n$ 角形(多角形)が定義されるのは，$n$ が自然数で，$n\geqq3$ のときであることに注意する。

**225**　対角線が次の本数である多角形を求めよ。

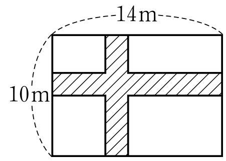
□(1)　27本　　□(2)　65本　　□(3)　135本

**226**　1から $n$ までの自然数の和は $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ で求められる。和が次のようになるのは，1からいくつまでの自然数の和か。

□(1)　45　　□(2)　120　　□(3)　300

## 73 図形に関する問題

縦 10 m，横 14 m の長方形の土地がある。いま，右の図のように，同じ幅の道路を作り，残りを畑にしたら，畑の部分の面積の合計が 96m² になった。このときの道路の幅を求めよ。




解　道路の幅を $x$ m として，道路を端にずらして考える。

$(10-x)(14-x)=96$，$x^2-24x+44=0$，$x=2$，22

$0<x<10$ より，$x=22$ は問題に適していない。$x=2$ は問題に適している。

よって，道路の幅は **2 m**

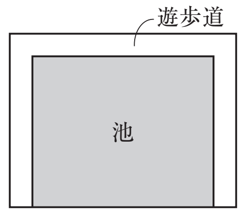
**227** 次の問い に答えよ。

□(1) ある正方形の縦の長さを 9 cm 短くし，横の長さを 3 cm 長くして長方形を作ったら，面積が 64 cm² になった。もとの正方形の 1 辺の長さを求めよ。

□(2) 横が縦より 3 m 長い長方形の土地がある。土地の周囲にそって，幅 2 m の道を内側に作ったら，残りの土地の面積は 88m² になった。もとの土地の縦の長さを求めよ。

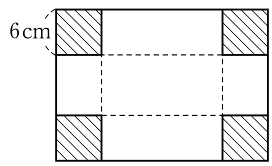
**228** 縦 20 m，横 25 m の長方形の形をした土地がある。右の図のように，
□同じ道幅の遊歩道をつくり，残りの部分を池にした。

池の部分の面積と土地全体の面積の比が 7：10 であるとき，遊歩道の道幅は何 m か求めよ。

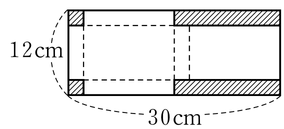



**229** 次の問いに答えよ。

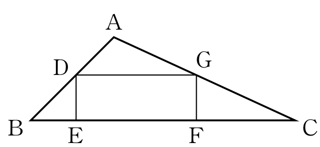
□(1) 横が縦より 8 cm 長い長方形の厚紙がある。この 4 すみから 1 辺 6 cm の正方形を切り取り，折り曲げて容積 768 cm³ の直方体の形をした容器を作った。この厚紙の縦，横の長さを求めよ。




□(2) 縦 12 cm，横 30 cm の長方形の紙から，図の斜線部分の 2 つの正方形と 2 つの長方形を切り取り，折り曲げて直方体を作ったら，表面積が 300 cm² になった。切り取った正方形の 1 辺の長さを求めよ。

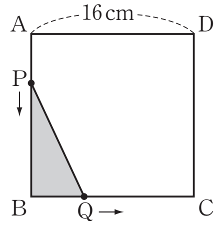



**230** 右の図のように，∠B＝45°，BC＝13 cm の △ABC がある。
□辺 AB 上に点 D，辺 BC 上に 2 点 E，F，辺 AC 上に点 G をとり，四角形 DEFG が長方形になるようにする。DG＝7 cm で，△GFC の面積が，△DBE の面積より 1 cm² 大きいとき，DE の長さを求めよ。



## 74　動点に関する問題

1 辺の長さが 16 cm の正方形 ABCD がある。点 P は A を出発し，毎秒 1 cm の速さで辺 AB 上を B まで動く。また，点 Q は点 P が A を出発するのと同時に B を出発し，P と同じ速さで辺 BC 上を C まで動く。△PBQ の面積が 24 $\mathrm{cm}^2$ になるのは，点 P，Q が出発してから何秒後か。




解　$x$ 秒後に △PBQ の面積が 24 $\mathrm{cm}^2$ になったとすると，

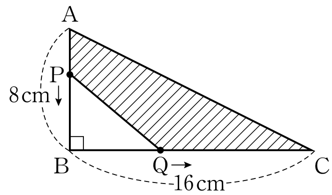
AP＝BQ＝$x$ cm より，PB＝AB－AP＝16－$x$(cm) だから，

方程式は，$\frac{1}{2}x(16-x)=24$

これを整理して，$x^2-16x+48=0$，$(x-4)(x-12)=0$ より，$x=4$，12

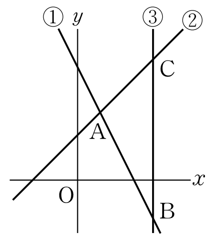
$0<x<16$ だから，$x=4$，12 はともに問題に適している。したがって，**4 秒後，12 秒後**

**231**　右の図のような，AB＝8 cm，BC＝16 cm，∠B＝90° の直角三角形 ABC がある。点 P は A を出発し，毎秒 1 cm の速さで辺 AB 上を B まで動く。また，点 Q は，点 P が A を出発するのと同時に B を出発し，毎秒 2 cm の速さで辺 BC 上を C まで動く。四角形 APQC の面積が 52 $\mathrm{cm}^2$ になるのは，点 P，Q が出発してから何秒後か。




## 75　関数のグラフに関する問題

3 直線 $y=-2x+5$…①，$y=x+2$…②，$x=a$…③があるとき，①と②，①と③，②と③の交点をそれぞれ A，B，C とする。△ABC の面積が 24 のとき，$a$ の値を求めよ。ただし，③は点 A の右側にあるとする。




解　点 A の座標は，$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=x+2 \end{cases}$ を解いて，A(1，3)

B($a$，$-2a+5$)，C($a$，$a+2$) だから，

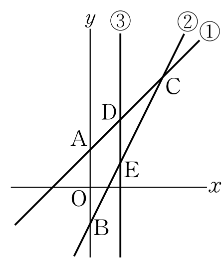
BC＝$(a+2)-(-2a+5)=3a-3=3(a-1)$

△ABC で，BC を底辺とすると，高さは $a-1$ だから，△ABC＝$\frac{3}{2}(a-1)^2$

よって，$\frac{3}{2}(a-1)^2=24$，$(a-1)^2=16$，$a=5$，$-3$

$a>1$ より，$a=-3$ は問題に適していない。$a=5$ は問題に適している。よって，$\boldsymbol{a=5}$

**232**　3 直線 $y=x+3$…①，$y=2x-3$…②，$x=a$…③がある。①，②と $y$ 軸との交点をそれぞれ A，B とし，①と②，①と③，②と③の交点をそれぞれ C，D，E とする。このとき，次の問いに答えよ。




(1)　③は点 C の左側にあるとする。
△CDE の面積が 8 となるとき，$a$ の値を求めよ。

(2)　③は $y$ 軸の右側にあって，点 C の左側にあるとする。
台形 ABED の面積が 16 となるとき，$a$ の値を求めよ。

## 76　割合に関する問題

原価 1600 円の品物に $x$ % の利益を見込んで定価をつけた。この品物を大売り出しの日に，特価品として定価の $x$ % 引きにして売ったので，100 円の損失が出たという。$x$ の値を求めよ。

解　$x$ % は $\frac{x}{100}$ だから，(定価)＝(原価)×$\left(1+\frac{x}{100}\right)$，(売り値)＝(定価)×$\left(1-\frac{x}{100}\right)$ より，

$1600\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)-1600=-100$，$-\frac{16}{100}x^2=-100$，$x^2=\frac{100^2}{4^2}$，$x=\pm25$

$0<x<100$ より，$x=-25$ は問題に適していない。$x=25$ は問題に適している。

よって，$\boldsymbol{x=25}$

**233**　次の問いに答えよ。

□(1)　原価が 1000 円の品物に $x$ 割の利益を見込んで定価をつけたが，古くなったので，定価の $x$ 割引きで売った。このとき，40 円の損をしたという。$x$ の値を求めよ。

□(2)　ある商品の値段を 2 回値上げした。2 回目の値上げの割合は 1 回目より 10 % 多かった。この 2 回の値上げによって，この商品の値段は最初の値段より 56 % 上がったという。1 回目と 2 回目はそれぞれ何 % の値上げをしたか。

**234**　ある商品を 1 個 100 円で売ると，1 日に 400 個売れるが，値段を 1 円上げると 1 日に売れる個数は 2 個減る。売り上げが 45000 円であった日は，この商品を 1 個何円で売ったか。

## 77　解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

---

2 次方程式 $2x^2+5x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha+\beta$　　(2)　$\alpha\beta$　　(3)　$\alpha^2+\beta^2$　　(4)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

解　(1)，(2)　解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$，$\alpha\beta=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{25}{4}-1=\boldsymbol{\frac{21}{4}}$

(4)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{5}{2}\div\frac{1}{2}=\boldsymbol{-5}$

**235**　次の 2 次方程式の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求めよ。

□(1)　$x^2+6x-3=0$　　□(2)　$9x^2-10x-2=0$

□(3)　$2x^2+7x+1=0$　　□(4)　$4x^2-7x+3=0$

**236**　2 次方程式 $3x^2+2x-3=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，次の式の値を求めよ。

□(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　□(2)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

□(3)　$(\alpha-1)(\beta-1)$　　□(4)　$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

## 78　2次方程式の作成①

2 数 $\alpha$，$\beta$ を解とする 2 次方程式は，$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

---

2 数 $2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$ を解とする $x$ の 2 次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は 1 とする。

解　解の和は，$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$ だから，$x$ の係数は $-4$

解の積は，$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ だから，定数項は 1

よって，求める 2 次方程式は，$\boldsymbol{x^2-4x+1=0}$

**237** 次の 2 数を解とする $x$ の 2 次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は正とし，各係数がもっとも簡単な整数の組になるようにせよ。

□(1) 2，5　　□(2) 1，$-3$

□(3) $1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$　　□(4) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

□(5) $\dfrac{-5+\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{-5-\sqrt{3}}{3}$　　□(6) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$

## 応　79　2次方程式の作成②

2 次方程式 $x^2-5x+3=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha-1$，$\beta-1$ を 2 つの解とする $x$ の 2 次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は 1 とする。

解　$x^2-5x+3=0$ において，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=3$

求める 2 次方程式の解の和は，$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2=5-2=3$

解の積は，$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=3-5+1=-1$

よって，求める 2 次方程式は，$\boldsymbol{x^2-3x-1=0}$

応 **238** □ 2 次方程式 $x^2+x-3=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha^2$，$\beta^2$ を 2 つの解とする $x$ の 2 次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は 1 とする。

応 **239** □ 2 次方程式 $2x^2-5x-4=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$2\alpha+1$，$2\beta+1$ を 2 つの解とする $x$ の 2 次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は 1 とする。

応+ **240** □ 2 次方程式 $3x^2+7x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\dfrac{1}{\alpha+1}$，$\dfrac{1}{\beta+1}$ を 2 つの解とする $x$ の 2 次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は正とし，各係数がもっとも簡単な整数の組になるようにせよ。

## 節末問題

**241** 次の問いに答えよ。

□(1) 2次方程式 $x^2+(a+3)x+a^2+4a-6=0$ の1つの解が $-2$ で，他の解が正の数のとき，$a$ の値と他の解を求めよ。

□(2) 2つの正の数の差が $\frac{1}{2}$ で，2数の和と2数の平方の和が等しいという。この2数を求めよ。

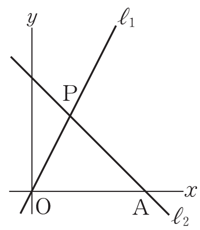
□(3) 大小2つの正方形があり，大きい正方形の1辺の長さは，小さい正方形の1辺の長さの2倍より1cm長い。大きい正方形の面積から小さい正方形の面積をひいた差が149 $\text{cm}^2$ であるとき，小さい正方形の1辺の長さを求めよ。

応□(4) 濃度10％の食塩水10kgを入れた容器からいくらかの量をくみ出して，同量の水をもどした。さらに，初めにくみ出した量の2倍の量をくみ出して，それと同量の水をもどしたところ，濃度が7.2％になった。最初にくみ出した量は何kgか。

応□(5) 入口から水面までの距離が34mの井戸がある。この井戸に石を落としたところ，$x$ 秒後に水音がした。$x$ の値を求めよ。ただし，石は落ちてから $t$ 秒間で $5t^2$ m落ち，音は1秒間に340m進むとする。

応**242** □ 金井君と犬が散歩していると，犬の15m前方を秒速4mで2人と同じ進行方向へ走る人がいた。その人を見つけた犬が走り出し，ぬき去った。この犬が走り始めてから $t$ 秒後の移動距離は $(t^2+2t)$m と表されるという。犬が走り始めてから前方の人に追いつくのにかかる時間は何秒か。

**243** 右の図は，点P(2，4)で交わる2つの直線 $\ell_1\cdots y=2x$，$\ell_2\cdots y=-x+a$，および直線 $\ell_2$ と $x$ 軸との交点Aを示したものである。




□(1) $a$ の値を求めよ。

(2) 線分AP上(点A，Pは除く)に点Qをとる。点Qを通り $y$ 軸に平行な直線と，$x$ 軸，直線 $\ell_1$ との交点をそれぞれR，Sとする。また，点Qの $x$ 座標を $t$ とする。このとき，

□① △ORSの面積を $t$ の式で表せ。

□② △ORSの面積が△AQRの面積の8倍になるとき，点Qの座標を求めよ。

**244** 次の問いに答えよ。

□(1) 2次方程式 $2x^2+3x-1=0$ の解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$\alpha^4+\beta^4$ の値を求めよ。

応□(2) ある2次方程式の2つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$5\alpha-2$，$5\beta-2$ を解とする2次方程式は $x^2-7x+4=0$ になるという。もとの2次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は正とし，各係数がもっとも簡単な整数の組になるようにせよ。

## 3章のチャレンジ問題

**245** 次の問いに答えよ。

応□(1) 2次方程式 $(x-a)^2-3(x-a)+2=0$ が $x=1+\sqrt{2}$ を解としてもつとき，$a$ の値を求めよ。

応□(2) $x=1-2a$ は，2次方程式 $x^2+2(a-1)x-2(a-1)(2a-1)=0$ の負の解である。$a$ の値を求めよ。

応□(3) 正の数 $x$ を整数部分 $a$ と小数部分 $b$ に分けると，$x^2+b^2=15$ を満たすという。$a$，$b$ の値を求めよ。

応**246** 次の問いに答えよ。

□(1) 2次方程式 $x^2-\sqrt{3}ax+a=0$ の2つの解の差が2となるという。$a$ の値を求めよ。

□(2) 2次方程式 $x^2+5x+2=0$ の解を $\alpha$，$\beta(\alpha>\beta)$ とするとき，$\alpha^2$，$-\beta^2$ を解とする $x$ の2次方程式を求めよ。ただし，$x^2$ の係数は1とする。

□(3) 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解はともに，2次方程式 $x^2+bx+a=0$ の2つの解より3小さいという。$a$，$b$ の値を求めよ。

応**247** 次の2つの2次方程式が共通な解をもつとき，共通な解および $a$ の値を求めよ。
□
$x^2-2x+a-2=0$…①　　$2x^2-5x+3a+6=0$…②

**248** 次の方程式を解け。ただし，$|x|$ は $x$ の絶対値を表す。

応□(1) $x^4-18x^2+1=0$

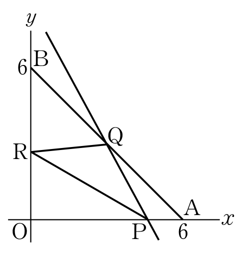
応□(2) $(x-7)(x-4)(x-1)(x+2)+32=0$

応□(3) $x^2-|x|-6=0$

応□(4) $x^2-9|x+1|=27$

応**249** 1辺の長さが1の正十角形に外接する円の半径を求めよ。
□

**250** 3点O(0, 0)，A(6, 0)，B(0, 6)を頂点とする△OABがある。このとき，次の問いに答えよ。




□(1) 直線 $y=-2x+k$ が辺AB(点A，Bをふくむ)と交わるような $k$ の値の範囲を求めよ。

(2) 右の図のように直線 $y=-2x+k$ が辺OA，ABと交わる点をそれぞれP，Qとし，辺OB上に点Rを $\triangle PQR=\dfrac{1}{4}\triangle OAB$ となるようにとる。

応□① $k=8$ のとき，点Rの座標を求めよ。

応□② 点Rが辺OBの中点になるとき，$k$ の値を求めよ。