8 空間図形の計量①

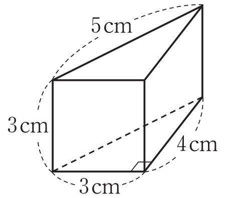
39 柱体の体積・表面積

① 立体のすべての面の面積の和を**表面積**という。また，側面全体の面積を**側面積**，1つの底面の面積を**底面積**という。

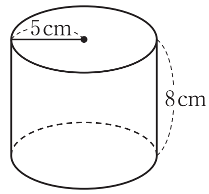
② (柱体の体積)＝(底面積)×(高さ)，(柱体の表面積)＝(側面積)＋(底面積)×2

次の柱体の体積と表面積を求めよ。

(1)



(2)

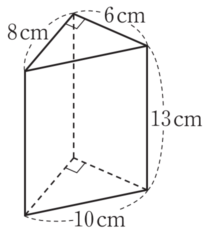


解 底面積は，$\frac{1}{2}\times3\times4=6$ (cm^2) より，
体積は，$6\times3=$**18 (cm^3)**
側面積は，$3\times(3+4+5)=36$ (cm^2) より，
表面積は，$36+6\times2=$**48 (cm^2)**

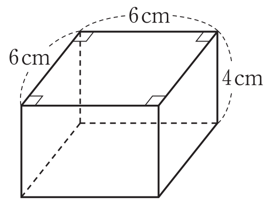
解 底面積は，$\pi\times5^2=25\pi$ (cm^2) より，
体積は，$25\pi\times8=$**200π (cm^3)**
側面積は，$8\times(2\pi\times5)=80\pi$ (cm^2) より，
表面積は，$80\pi+25\pi\times2=$**130π (cm^2)**

157 次の柱体の体積と表面積を求めよ。

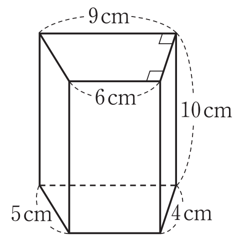
□(1)



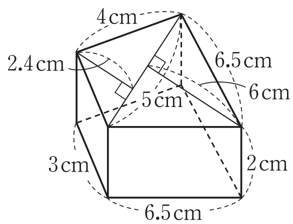
□(2)



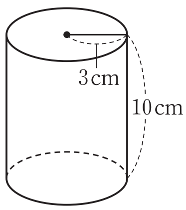
□(3)



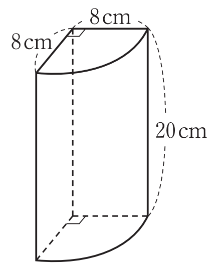
□(4)



□(5)



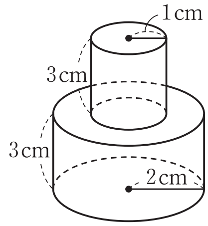
□(6)



158 底面の半径が 4 cm の円柱がある。この円柱の側面積が表面積の半分であるとき，円柱の高さ
□を求めよ。

40　組み合わさった立体

右の図の立体の体積と表面積を求めよ。



解　この立体は，2つの円柱が重なってできた立体である。

求める体積は，2つの円柱の体積の和に等しいから，

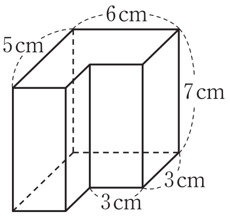
$(\pi\times1^2)\times3+(\pi\times2^2)\times3=\mathbf{15\pi\ (cm^3)}$

求める表面積は，小さい円柱の側面積と大きい円柱の表面積の和に等しいから，

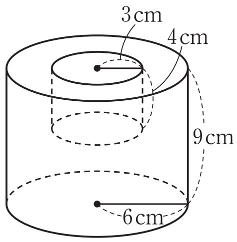
$3\times(2\pi\times1)+3\times(2\pi\times2)+(\pi\times2^2)\times2=\mathbf{26\pi\ (cm^2)}$

159　次の立体は，直方体，立方体，円柱が組み合わさった立体である。体積と表面積を求めよ。

□(1)

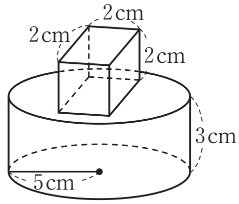


□(2)



（円柱から円柱をくり抜いた立体）

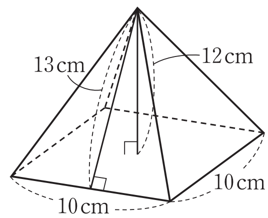
□(3)



41　角錐の体積・表面積

(錐体の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)，(錐体の表面積)$=$(側面積)$+$(底面積)

右の図の正四角錐の体積と表面積を求めよ。



解　底面積は，$10^2=100(\mathrm{cm}^2)$ より，

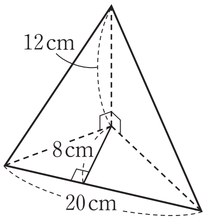
体積は，$\dfrac{1}{3}\times100\times12=\mathbf{400\ (cm^3)}$

側面積は，$\left(\dfrac{1}{2}\times10\times13\right)\times4=260(\mathrm{cm}^2)$ より，

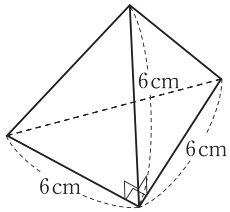
表面積は，$260+100=\mathbf{360\ (cm^2)}$

160　次の角錐の体積を求めよ。また，(3)については表面積も求めよ。

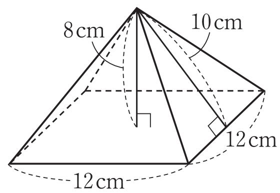
□(1)



□(2)



□(3)

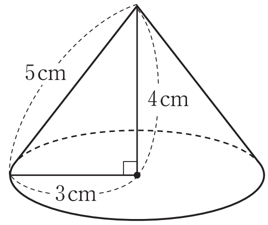


（正四角錐）

42 円錐の体積・表面積

右の図の円錐について，次のものを求めよ。

(1) 体積　　(2) 表面積



解 (1) 底面積は，$\pi\times3^2=9\pi(\text{cm}^2)$ より，

体積は，$\frac{1}{3}\times9\pi\times4=$ **12π (cm^3)**

(2) 側面となるおうぎ形の中心角を $a°$ とすると，

$2\pi\times5\times\frac{a}{360}=2\pi\times3$，$a=216$

側面積は，$\pi\times5^2\times\frac{216}{360}=15\pi(\text{cm}^2)$ より，

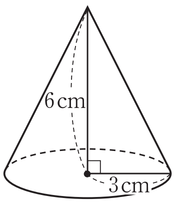
表面積は，$15\pi+9\pi=$ **24π (cm^2)**

〔**別解**〕 (おうぎ形の面積)$=\frac{1}{2}\times$(弧の長さ)$\times$(半径) より，

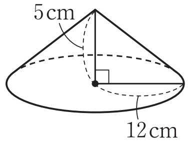
側面積は，$\frac{1}{2}\times(2\pi\times3)\times5=15\pi(\text{cm}^2)$

161 次の円錐の体積を求めよ。

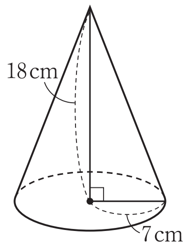
□(1)



□(2)

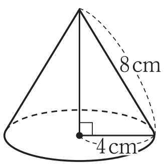


□(3)

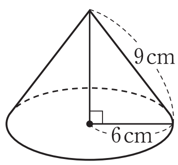


162 次の円錐の表面積を求めよ。

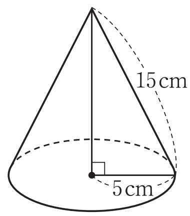
□(1)



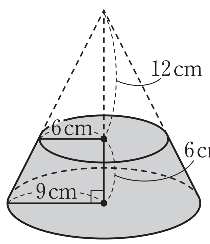
□(2)



□(3)

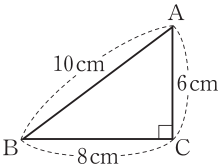


163 右の図の影の部分の立体は，円錐を，その底面に平行な平面で切り，頂点のある方の立体を取り除いた立体である。この立体の体積を求めよ。



43 回転体の体積・表面積

右の図の直角三角形 ABC を，次のように 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めよ。



(1) 辺 AC を軸として 1 回転させる

(2) 辺 BC を軸として 1 回転させる

解 (1) できる立体は，底面の半径が 8 cm，高さが 6 cm，母線の長さが 10 cm の円錐である。

体積は，$\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times6=\mathbf{128\pi\ (cm^3)}$

表面積は，$\frac{1}{2}\times(2\pi\times8)\times10+\pi\times8^2=\mathbf{144\pi\ (cm^2)}$

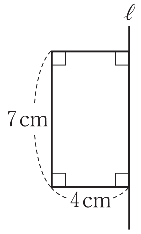
(2) できる立体は，底面の半径が 6 cm，高さが 8 cm，母線の長さが 10 cm の円錐である。

体積は，$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=\mathbf{96\pi\ (cm^3)}$

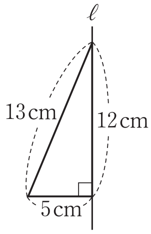
表面積は，$\frac{1}{2}\times(2\pi\times6)\times10+\pi\times6^2=\mathbf{96\pi\ (cm^2)}$

164 次の平面図形を，直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めよ。

□(1)

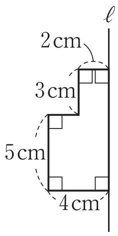


□(2)

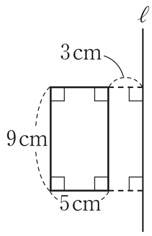


165 次の平面図形を，直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めよ。

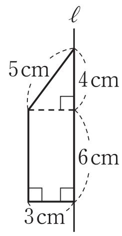
□(1)



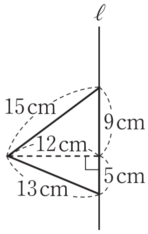
□(2)



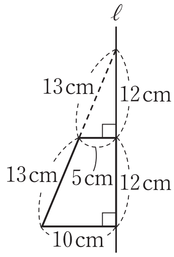
□(3)



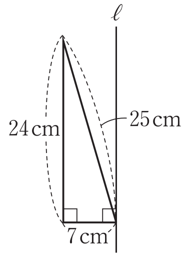
□(4)



□(5)



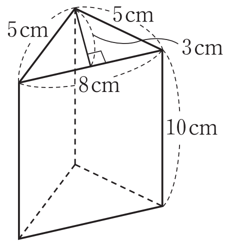
□(6)



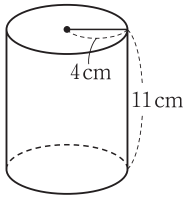
節末問題

166 次の図の立体の体積と表面積を求めよ。

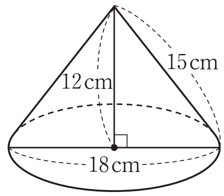
□(1)



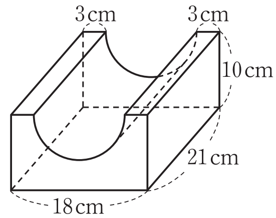
□(2)



□(3)



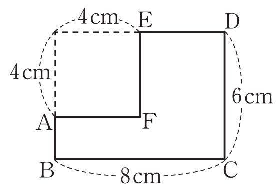
167 右の図は，直方体から円柱の半分を切り取った立体である。この
□立体の体積と表面積を求めよ。



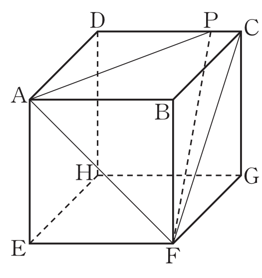
168 右の図は，縦 6 cm，横 8 cm の長方形から，1 辺 4 cm の正方形を取り除いたものである。

□(1) 直線 DC を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めよ。

□(2) 直線 ED を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積を求めよ。



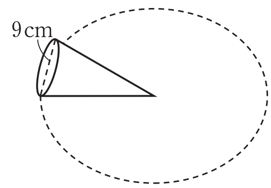
応 **169** 右の図は，1 辺が 6 cm の立方体で，点 P は辺 DC 上の点である。
□四角錐 F-PABC の体積が立方体の体積の $\frac{2}{9}$ であるとき，線分 PC の長さを求めよ。



応 **170** 右の図のように，底面の直径が 9 cm の円錐を，平面上をすべらないように転がしたところ，円錐が 4 回転したところでもとの位置にもどってきた。

□(1) 点線の円の周の長さを求めよ。

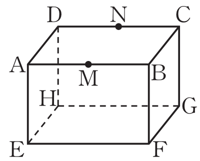
□(2) 転がした円錐の表面積を求めよ。



9 空間図形の計量②

44 切断と体積

右の図は，AB＝6 cm，AD＝3 cm，AE＝4 cm の直方体である。また，点 M，N はそれぞれ辺 AB，DC の中点である。この直方体を次の平面で切るとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

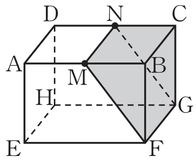


(1) 点 M を通り，辺 FG をふくむ平面

(2) 3 点 M，D，E を通る平面

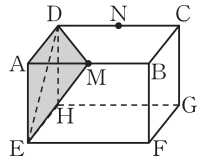
解 (1) 三角柱 MBF-NCG となる。△MBF を底面とみると高さは CB だから，体積は，

$\left(\dfrac{1}{2}\times3\times4\right)\times3=$**18 (cm³)**



(2) 三角錐 AMDE となる。△DAE を底面とみると高さは MA だから，体積は，

$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times4\right)\times3=$**6 (cm³)**

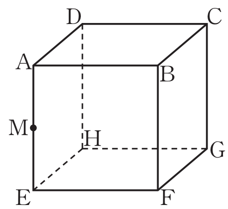


171 右の図は 1 辺が 6 cm の立方体で，点 M は辺 AE の中点である。この立方体を次の平面で切るとき，頂点 A をふくむ方の立体の体積を求めよ。

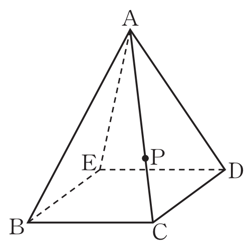
□(1) 3 点 M，B，D を通る平面

□(2) 3 点 M，B，C を通る平面

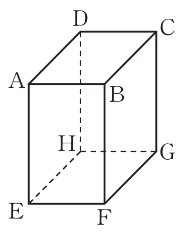
□(3) 3 点 M，F，G を通る平面



172 右の図の正四角錐 A-BCDE は，底面の 1 辺が 6 cm で，高さが 9 cm である。また，点 P は辺 AC 上にあり，底面からの高さが 3 cm の点である。この正四角錐を 3 点 P，B，D を通る平面で切るとき，点 A をふくむ方の立体の体積を求めよ。

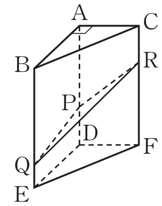


173 右の図は，AB＝5 cm，AD＝6 cm，AE＝8 cm の直方体である。この直方体から，4 つの三角錐 BACF，DACH，EAFH，GCFH を切り取ってできる立体の体積を求めよ。



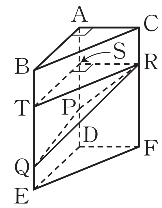
45 複雑な立体

右の図は，∠BAC＝90°，AB＝6 cm，AC＝5 cm，AD＝10 cm の三角柱である。点 P，Q，R はそれぞれ辺 AD，BE，CF 上の点で，AP＝7 cm，BQ＝8 cm，CR＝3 cm である。この三角柱を，3 点 P，Q，R を通る平面で切るとき，点 A をふくむ方の立体の体積を求めよ。



解　点 R を通り，面 ABC に平行な平面と，辺 AD，BE の交点をそれぞれ S，T とすると，三角柱 ABC-STR と四角錐 R-STQP に分けられるから，

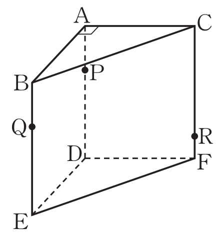
体積は，$\left(\frac{1}{2}\times6\times5\right)\times3+\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(4+5)\times6\right\}\times5=\mathbf{90\ (cm^3)}$



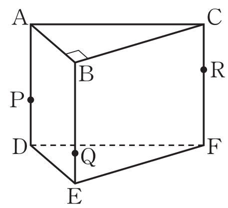
〔別解〕　三角錐 ABCR と四角錐 R-ABQP に分けられるから，

体積は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times5\right)\times3+\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(7+8)\times6\right\}\times5=\mathbf{90\ (cm^3)}$

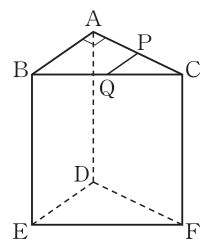
174　右の図は，∠BAC＝90°，AB＝4 cm，AC＝5 cm，AD＝6 cm の三角柱である。点 P，Q，R はそれぞれ辺 AD，BE，CF 上の点で，AP＝BQ＝2 cm，RF＝1 cm である。この三角柱を，3 点 P，Q，R を通る平面で切るとき，点 A をふくむ方の立体の体積を求めよ。



175　右の図は，∠ABC＝90°，AB＝5 cm，BC＝9 cm，AD＝8 cm の三角柱である。点 P，Q，R はそれぞれ辺 AD，BE，CF 上の点で，PD＝CR＝3 cm，QE＝2 cm である。この三角柱を，3 点 P，Q，R を通る平面で切るとき，点 E をふくむ方の立体の体積を求めよ。

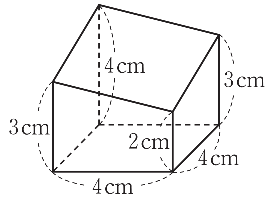


応 **176**　右の図は，∠BAC＝90°，AB＝6 cm，AC＝8 cm，AD＝10 cm の三角柱である。点 P，Q はそれぞれ辺 AC，BC の中点で，PQ⊥AC，PQ＝3 cm である。この三角柱を，点 D を通り，線分 PQ をふくむ平面で切るとき，点 A をふくむ方の立体の体積を求めよ。



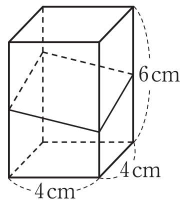
46　立体のはり付け

右の図は，正四角柱を１つの平面で切ったときにできた立体の一方である。この立体の体積を求めよ。



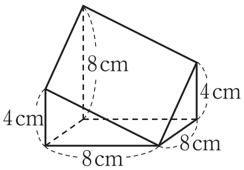
解　右の図のように，この立体を２つ重ねると，正四角柱ができる。求める体積は，この正四角柱の体積の半分だから，

$(4^2\times6)\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{48\ (cm^3)}$

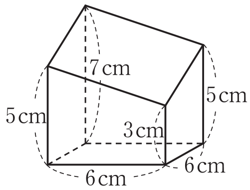


177　次の図は，正四角柱を１つの平面で切ったときにできた立体の一方である。体積を求めよ。

□(1)

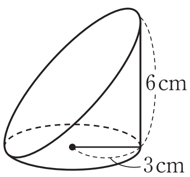


□(2)

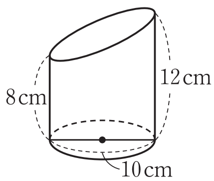


178　次の図は，円柱を１つの平面で切ったときにできた立体の一方である。体積を求めよ。

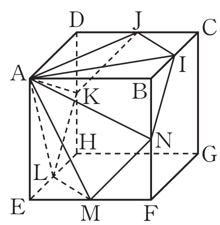
□(1)



□(2)

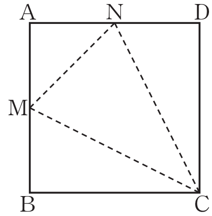


応 **179**　右の図は１辺２cm の立方体で，点 I，J，K，L，M，N はそれぞれ辺
□BC，CD，DH，HE，EF，FB の中点である。これらの点と点 A を結んでできる六角錐 A-IJKLMN の体積を求めよ。



47 展開図から考える問題

右の図のように，1 辺 4 cm の正方形があり，点 M，N はそれぞれ辺 AB，AD の中点である。いま，線分 MN，MC，CN を折り目として同じ側に折り曲げ，3 点 A，B，D を 1 点で重ねて立体を作る。



(1) △MCN の面積を求めよ。

(2) 立体の体積を求めよ。

(3) △MCN を底面とするとき，立体の高さを求めよ。

解 (1) 正方形の面積から，3 つの直角三角形の面積の和をひいて求める。

$$4^2-\left\{\frac{1}{2}\times2\times2+\left(\frac{1}{2}\times4\times2\right)\times2\right\}=\mathbf{6\ (cm^2)}$$

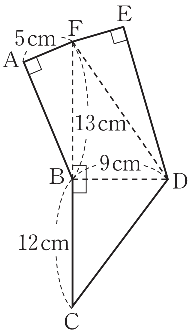
(2) できる立体は三角錐である。△AMN を底面とするときの高さは 4 cm だから，

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times4=\mathbf{\frac{8}{3}\ (cm^3)}$$

(3) 求める高さを h cm とすると，

$$\frac{1}{3}\times6\times h=\frac{8}{3},\ h=\frac{4}{3}\quad \text{よって，}\ \mathbf{\frac{4}{3}\ cm}$$

180 右の展開図を組み立ててできる立体について，次の問いに答えよ。



□(1) 立体の体積を求めよ。

□(2) △BDF を底面とするとき，立体の高さを求めよ。

181 右の図 1 の △ABC を，直線 AC を軸として 1 回転させて立体を作る。図 2 はこの立体の展開図である。

図 1

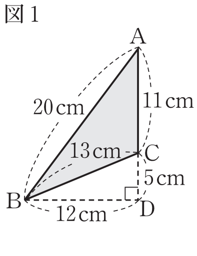
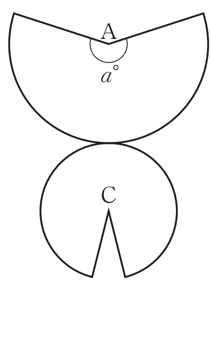


図 2



□(1) この立体の体積を求めよ。

□(2) 図 2 で，a の値を求めよ。

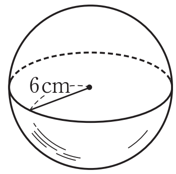
□(3) この立体の表面積を求めよ。

48　球の体積・表面積

半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$

半径 6 cm の球の体積と表面積を求めよ。



解　体積は，$\frac{4}{3}\pi\times 6^3=\mathbf{288\pi\ (cm^3)}$

表面積は，$4\pi\times 6^2=\mathbf{144\pi\ (cm^2)}$

182　次の球の体積と表面積を求めよ。

□(1)　半径が 3 cm の球

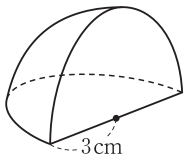
□(2)　半径が 5 cm の球

□(3)　半径が $\frac{3}{4}$ cmの球

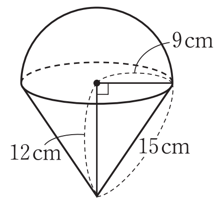
□(4)　直径が 9 cm の球

183　次の立体の体積と表面積を求めよ。

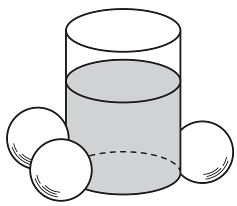
□(1)　右の図のように，半径 3 cm の球を中心を通って垂直に交わる 2 つの平面で切ってできた立体。



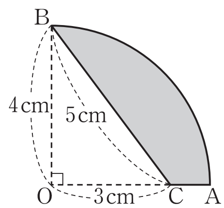
□(2)　右の図のように，半球と円錐を組み合わせた立体。



184　底面の半径が 8 cm の円柱形の容器に，水が 15 cm の深さまで入って
□いる。この中に，半径 4 cm の鉄の球を 3 個入れたら，全部水の中に入った。このとき，水の深さは何 cm になったか。



185　右の図のように，半径 4 cm，中心角 90° のおうぎ形 OAB から，3 辺の長さが 3 cm，4 cm，5 cm の直角三角形 OBC を切り取った。この図形について，次の問いに答えよ。

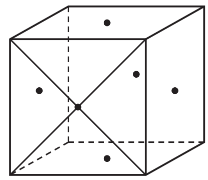


□(1)　この図形を OB を軸として 1 回転してできる立体の体積と表面積を求めよ。

□(2)　この図形を OA を軸として 1 回転してできる立体の体積と表面積を求めよ。

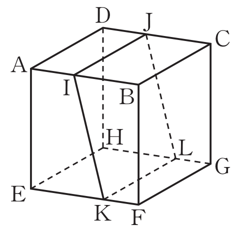
節末問題

186 右の図のように，1 辺 6 cm の立方体の各面に，対角線の交点をとる。これらの点を結んでできる立体の体積を求めよ。



187 右の図は，1 辺 3 cm の立方体 ABCD-EFGH において，4 つの辺 AB，DC，EF，HG 上にそれぞれ点 I，J，K，L をとったものである。

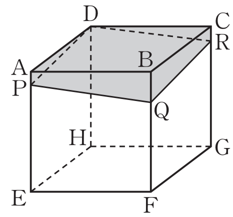
$AI=\frac{4}{3}$ cm，EK＝2 cm で，AD，IJ，KL がすべて平行であるとき，次の問いに答えよ。



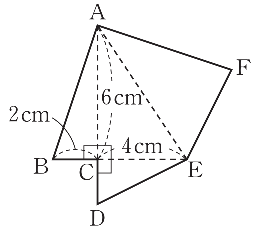
□(1) 点 A，E，K，I，D，H，L，J を頂点とする立体の体積を求めよ。

□(2) (1)の立体において，辺 AD，IJ の中点をそれぞれ M，N とする。この立体から，点 D，M，N，J，H，L を頂点とする立体を取り除いてできる立体の体積を求めよ。

応 **188** 右の図は，1 辺 10 cm の立方体で，点 P，Q，R はそれぞれ辺 AE，BF，CG 上にあり，AP＝CR，BQ＝2AP である。立方体の影をつけた部分の体積が，つけない部分の体積の $\frac{1}{7}$ であるとき，線分 BQ の長さを求めよ。



応 **189** 右の図は，ある立体の展開図である。この立体において，△AEF を底面としたときの高さは，$\frac{12}{7}$ cmである。



□(1) 立体の体積を求めよ。

□(2) 立体の表面積を求めよ。

190 半径 30 cm のなまりで作った球がある。この球を溶かして，半径 6 cm の球に作り変える。

□(1) 半径 6 cm の球は何個できるか。

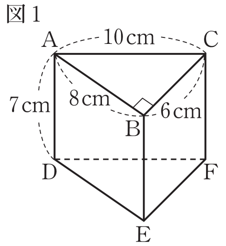
□(2) 半径 6 cm の球の表面積の合計は，もとの球の表面積の何倍になるか。

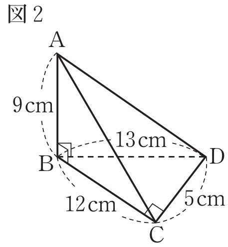
2章のチャレンジ問題

応191 次の問いに答えよ。

□(1) 右の図1の三角柱を，辺ADを軸として1回転するとき，面BEFCが通過する部分の体積を求めよ。

□(2) 右の図2の三角錐を，辺ABを軸として1回転するとき，面ACDが通過する部分の体積を求めよ。

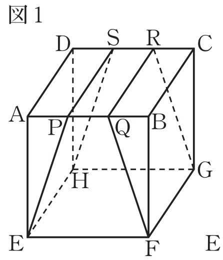


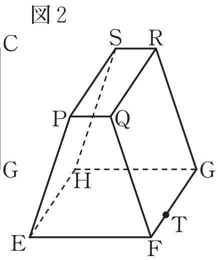


応192 右の図1は，1辺6cmの立方体で，点P，Qは辺ABを3等分する点，点R，Sは辺CDを3等分する点である。この立方体を2平面PEHS，QFGRで切ってできる立体(図2)について，次の問いに答えよ。

□(1) この立体の体積を求めよ。

□(2) 辺FG上に点Tをとり，この立体を3点R，S，Tを通る平面で切る。点Gをふくむ方の立体の体積が$70\ \mathrm{cm}^3$になるとき，線分GTの長さを求めよ。

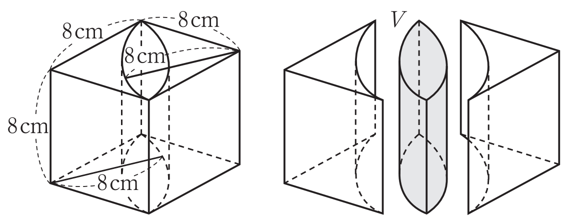




193 1辺8cmの立方体を，右の図のように切り離して，立体Vを作った。

□(1) 立体Vの体積を求めよ。

□(2) 立体Vの表面積を求めよ。



応194 右の図1は，1辺9cmの立方体である。この立方体のそれぞれの面について，9個の合同な正方形に分けられるように4本の線分をひく。このとき，4本の線分によって4個の交点ができ，全体では24個の交点ができる。この24個の点を頂点とする立体を作ると，図2のようになる。この立体について，次の問いに答えよ。

□(1) 面の数は何個か。

□(2) 辺の数は何本か。

□(3) 辺ABとねじれの位置にある辺の数は何本か。

□(4) 体積を求めよ。