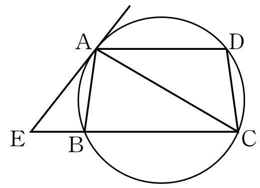
10 円の性質の利用

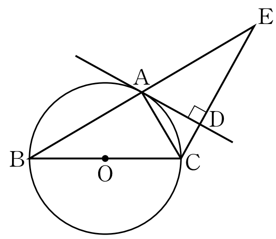
51 円と相似

右の図のように，AD∥BC である台形 ABCD が円に内接している。点 A における円の接線と辺 CB の延長との交点を E とする。このとき，△AEB∽△ACD であることを証明せよ。

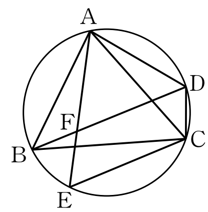


解　△AEB と △ACD において，
AE は円の接線だから，接弦定理により，∠EAB＝∠ACB
AD∥BC より，∠ACB＝∠CAD
よって，∠EAB＝∠CAD…①
四角形 ABCD は円に内接しているから，∠ABE＝∠ADC…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△AEB∽△ACD

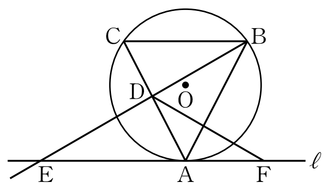
217 右の図のように，直径 BC を 1 辺とする △ABC が円 O に内接している。点 A における円 O の接線に C から垂線をひき，接線との交点を D，辺 BA の延長との交点を E とする。このとき，△ABC∽△DEA であることを証明せよ。



218 右の図のように，円に内接する △ABC がある。∠ABC に対する $\overset{\frown}{AC}$ 上に点 D を，∠BAC に対する $\overset{\frown}{BC}$ 上に点 E を BD∥EC となるようにとり，AE と BD の交点を F とする。このとき，△ABF∽△ACD であることを証明せよ。

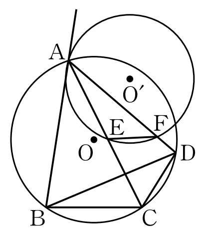


219 右の図のように，円 O に内接する鋭角三角形 ABC があり，点 A における接線 ℓ は辺 BC に平行である。点 B を通り辺 AC に垂直な直線と，辺 AC，接線 ℓ との交点をそれぞれ D，E とする。接線 ℓ 上にあり，DE＝DF となる点で，E とは異なる点を F とするとき，次の問いに答えよ。



□(1) △ABE と △ADF は相似であることを証明せよ。
□(2) ∠ACB＝63° のとき，∠BDF の大きさを求めよ。

220 右の図のように，2 つの円 O，O′ があり，円 O は四角形 ABCD の外接円で，円 O′ は点 A において直線 BA に接している。円 O′ が線分 AC，AD と交わる点をそれぞれ E，F とするとき，△AEF と △BCD は相似であることを証明せよ。



52　方べきの定理

円の２つの弦 AB，CD，またはそれらの延長が円周上にない点 P で交わるならば，

PA×PB＝PC×PD

〔証明〕　点 P が円の内部，外部のいずれにある場合も，同様に証明することができる。

△PAC と △PDB において，

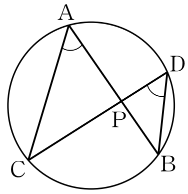
∠CAP＝∠BDP，∠APC＝∠DPB

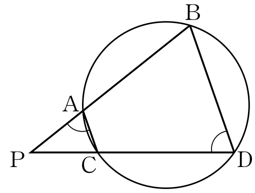
２組の角がそれぞれ等しいから，

△PAC∽△PDB

よって，PA：PD＝PC：PB

ゆえに，PA×PB＝PC×PD

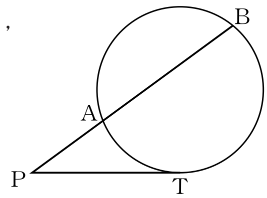




221　円の外部の点 P からこの円にひいた接線の接点を T とする。P を通り，この円と２点 A，B で交わる直線をひくと，

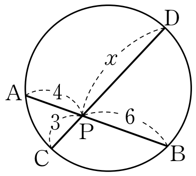
$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\times\mathrm{PB}$

が成り立つことを証明せよ。（これも，方べきの定理である。）

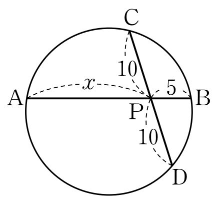


222　次の図で，x の値を求めよ。ただし，(5)，(6)で，PT は円の接線である。

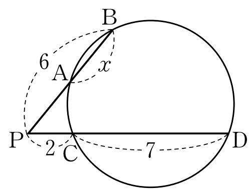
(1)



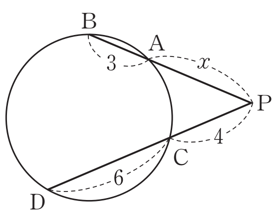
(2)



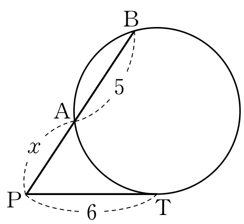
(3)



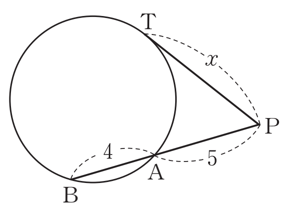
(4)



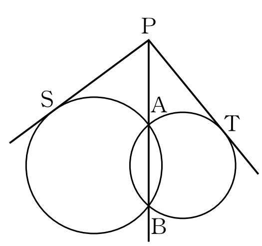
(5)



(6)



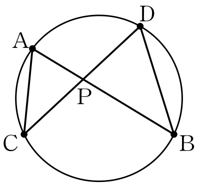
223　右の図は，２点で交わる２つの円の共通な弦 AB の延長上に点 P をとり，P からそれぞれの円に接線 PS，PT をひいたものである。このとき，PS＝PT であることを証明せよ。

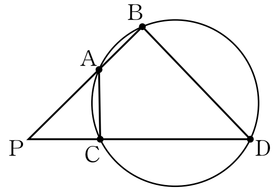


53　方べきの定理の逆

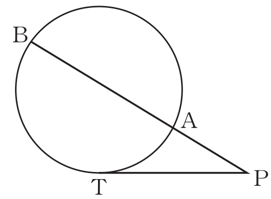
2つの線分AB，CD，またはそれらの延長の交点をPとするとき，PA×PB＝PC×PDならば，4点A，B，C，Dは同一円周上にある。

〔証明〕△PACと△PDBにおいて，
PA×PB＝PC×PDより，
PA：PD＝PC：PB
また，∠APC＝∠DPB
2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，△PAC∽△PDB
よって，∠PAC＝∠PDBより，4点A，B，C，Dは同一円周上にある。

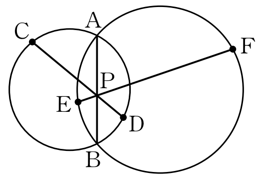




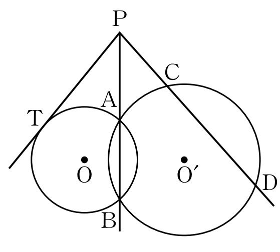
224 一直線上にない3点A，B，Tがあり，直線ABの延長上の点Pから直線PTをひくとき，PT^2＝PA×PBならば，PTは3点A，B，Tを通る円の接線であることを証明せよ。（これも，方べきの定理の逆である。）



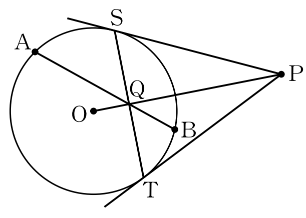
225 2点A，Bで交わる2円がある。線分AB上に点Pをとり，点Pで交わる2円の弦をそれぞれCD，EFとする。このとき，4点C，D，E，Fは同一円周上にあることを証明せよ。



226 2点A，Bで交わる2つの円O，O′がある。線分ABの延長上に点Pをとり，Pから円Oに接線PTをひき，円O′と2点C，Dで交わる直線をひく。このとき，PTは3点C，D，Tを通る円の接線であることを証明せよ。

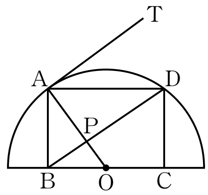


応 **227** 円Oの外部の点Pからこの円に接線PS，PTをひき，弦STとPOの交点をQとする。また，点Qを通る弦ABをひく。このとき，4点A，B，O，Pは同一円周上にあることを証明せよ。



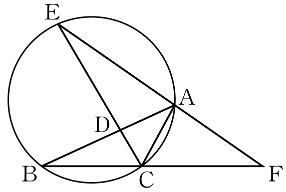
54 いろいろな問題

右の図のように，点 O を中心とする半円に長方形 ABCD が内接している。点 A における半円 O の接線を AT，線分 AO，BD の交点を P とする。AT∥BD のとき，AB：AD を求めよ。



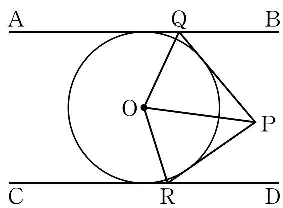
解　△ABO と △DAB において，∠ABO＝∠DAB＝90°
AT∥BD より，∠APB＝∠PAT＝90° だから，
∠BAO＝90°－∠ABD，∠ADB＝90°－∠ABD より，∠BAO＝∠ADB
2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABO∽△DAB
よって，AB：DA＝BO：AB
AB＝a，BO＝b とすると，DA＝$2b$ より，$a:2b=b:a$，$a^2=2b^2$，$a=\sqrt{2}b$
AB：AD＝$a:2b=\sqrt{2}b:2b=\sqrt{2}:2=$ **1：$\sqrt{2}$**

228　AB＝7，BC＝5，CA＝3，∠ACB＝120° の △ABC が円に内接している。∠ACB の二等分線と辺 AB，円との交点をそれぞれ D，E とし，直線 EA と直線 BC の交点を F とする。



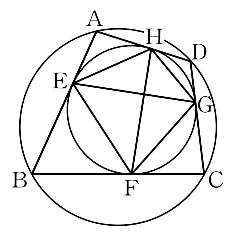
□(1)　線分 AD の長さを求めよ。
□(2)　AF：BF を求めよ。
□(3)　CD×DE を求めよ。
□(4)　線分 AF の長さを求めよ。

応**229**　右の図のように，点 P は円 O の平行な 2 つの接線 AB，CD の間にあり，円 O の外部にある。P から円 O にひいた 2 つの接線と AB，CD との交点をそれぞれ Q，R とする。



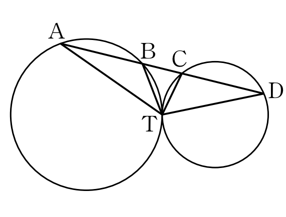
□(1)　∠AQP＋∠QPR＋∠PRC は何度か。
□(2)　PO^2＝PQ×PR であることを証明せよ。

230　右の図のように，四角形 ABCD が 1 つの円に内接し，同時に他の円に点 E，F，G，H で外接している。



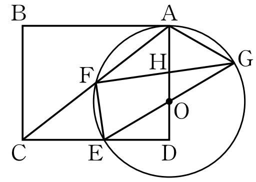
□(1)　∠EFH と大きさが等しい角を 3 つ書け。
□(2)　∠BAD＝x とするとき，∠EFH を x を用いて表せ。
□(3)　∠BCD＝y とするとき，∠FEG を y を用いて表せ。
□(4)　EG と FH の交点を P とするとき，∠EPH の大きさを求めよ。

応**231**　2 つの角の和が 180° になるとき，その 2 つの角は補角をなすという。右の図のように，点 T で外接する 2 円と T を通らない直線との 4 つの交点を A，B，C，D とする。このとき，∠ATD と ∠BTC は補角をなすことを証明せよ。



節末問題

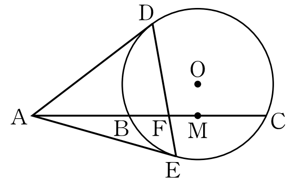
応**232** 右の図において，四角形 ABCD は AB＞AD の長方形である。辺 AD 上に点 O を OA＞OD となるようにとる。OA を半径とする円 O をかき，円 O と CD との交点を E，円 O と対角線 AC との交点を F とする。また，EO の延長と円 O との交点を G，OA と FG との交点を H とする。



□(1) △CEF∽△GHA であることを証明せよ。

□(2) ∠CEF＝84°，$\overset{\frown}{\mathrm{AF}}:\overset{\frown}{\mathrm{FE}}=3:2$ のとき，∠ECF の大きさを求めよ。

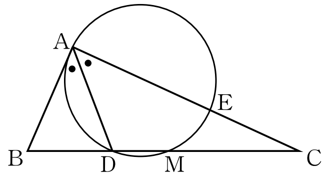
233 右の図のように，円 O 外の点 A を通る直線と円 O の交点を B，C とし，点 A から円 O にひいた 2 本の接線の接点をそれぞれ D，E とする。BC と DE の交点を F とし，弦 BC の中点を M とする。



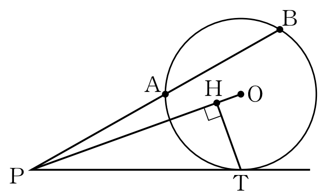
□(1) 5 点 O，D，A，E，M は同一円周上にあることを証明せよ。

□(2) △AFD∽△ADM であることを証明せよ。

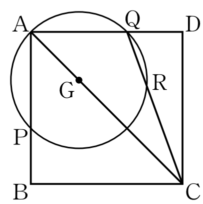
234 □ 右の図のように，AB＝5，BC＝12，CA＝11 の △ABC において，辺 BC の中点を M，∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D，3 点 A，D，M を通る円と辺 AC の交点を E とする。このとき，円の弦 AE の長さを求めよ。



応**235** □ 右の図のように，円 O の外部の点 P からこの円に 2 点 A，B で交わる直線と，点 T で接する接線をひく。また，T から直線 PO に垂線をひき，PO との交点を H とする。このとき，4 点 A，H，O，B は同一円周上にあることを証明せよ。



応**236** 右の図のように，1 辺の長さが 2 の正方形 ABCD がある。その対角線 AC 上に点 G をとる。G を中心として A を通る円が，AB と交わる点を P，AD と交わる点を Q，QC と交わる点を R とする。



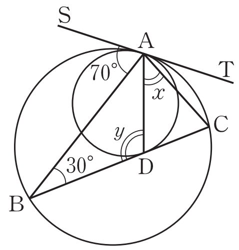
□(1) ∠PRC の大きさを求めよ。

□(2) ∠BRC＝∠DQC であることを証明せよ。

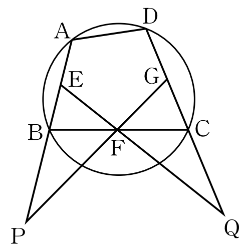
□(3) G が A を出発して AC の中点まで動くとき，R はある曲線をえがく。その曲線の長さを求めよ。

3章のチャレンジ問題

応**237** 右の図で，直線 ST は点 A で大きい円と小さい円に接し，大きい円の弦 BC は点 D で小さい円に接している。$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めよ。



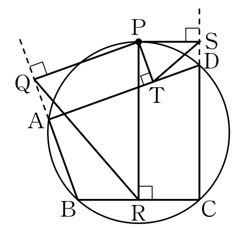
応**238** 右の図のように，円に内接する四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD の中点をそれぞれ E，F，G とし，直線 AB と GF の交点を P，直線 DC と EF の交点を Q とする。このとき，4 点 E，P，Q，G は同一円周上にあることを証明せよ。



応**239** 右の図のように，円に内接する四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA またはその延長上に，円周上の点 P から，それぞれ垂線 PQ，PR，PS，PT をひく。

□(1) △PQR∽△PTS であることを証明せよ。

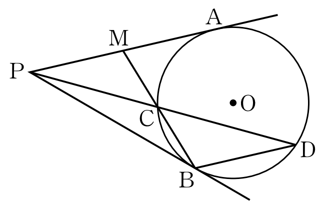
□(2) BD が円の直径で，PR：RC＝3：1，BR：RC＝4：3 のとき，△TDC の面積は △QBR の面積の何倍か。



応**240** 右の図のように，2 直線 PA，PB が点 A，B で円 O に接している。線分 PA の中点を M とし，線分 BM と円 O との交点を C とする。また，直線 PC と円 O との交点のうち，C 以外の点を D とする。

□(1) 直線 AP は 3 点 P，C，B を通る円に接することを証明せよ。

□(2) PA∥BD であることを証明せよ。



応**241** 右の図で，点 O は円の中心，2 点 A，B は O に関して対称な位置にある円 O の内部の定点である。円周上の任意の点を P とし，直線 PA，PB と円 O との交点のうち，P 以外の点をそれぞれ Q，R とする。

このとき，AP×AQ＝BP×BR であることを証明せよ。