3章　1次関数　0

◆◇学習の要点◇◆

❶ 1次関数 ☞P55〜

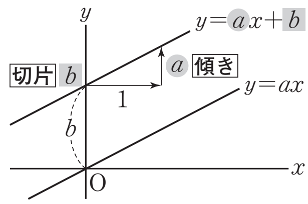
(1)　**1次関数**　x と y の関係が $\boldsymbol{y=ax+b}$ と表せるとき，y は x の **1次関数**であるという。

(a，b は定数で $a \neq 0$)　※比例 $y=ax$ は，1次関数 $y=ax+b$ において，$b=0$ の特別な場合。

(2)　**変化の割合**　$(\text{変化の割合})=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ ← x の値が1増えると，y の値がいくつ増えるかということ。

1次関数 $y=ax+b$ では，変化の割合は一定で，a に等しい。

(3)　**1次関数のグラフ**



①　1次関数 $y=ax+b$ のグラフは，比例 $y=ax$ のグラフを y 軸の正の方向に b だけ平行移動したもの。

②　1次関数 $y=ax+b$ のグラフは，**傾き**が a，**切片**が b の直線。

($a>0$ のとき右上がり，$a<0$ のとき右下がりの直線)

❷ 1次関数の求め方 ☞P62〜

(1)　求める式を $y=ax+b$ とおき，わかっている情報から a，b の値を決定する。

①「変化の割合が■」「傾きが■」　➡　a に■を代入

②「$x=0$ のとき $y=$▲」「点(0，▲)を通り」「切片が▲」　➡　b に▲を代入

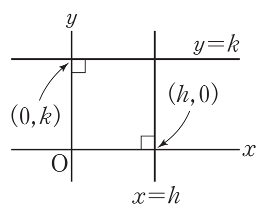
③「$x=$● のとき $y=$★」「点(●，★)を通り」　➡　x に●，y に★を代入

※ x，y の値の組が2組与えられたとき(2点の座標が与えられたとき)は，連立方程式をつくって a，b の値を求める。また，変化の割合(傾き)を求めてから，a に代入してもよい。

(2)　a，b の値を求めたら，その値を $y=ax+b$ の形にあてはめて答える。

❸ 1次関数と方程式 ☞P68〜

(1)　**2元1次方程式とグラフ**



①　2元1次方程式 $ax+by+c=0$ のグラフは直線。

($y=mx+n$ の形に変形すれば，傾きが m，切片が n とわかる。)

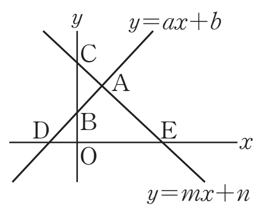
②　$y=k$ のグラフは，x 軸に平行で点(0，k)を通る直線。

(①で，$a=0$ のとき)

③　$x=h$ のグラフは，y 軸に平行で点(h，0)を通る直線。

(①で，$b=0$ のとき)

(2)　**グラフの交点**



右の図のように2直線 $y=ax+b$ ……㋐，$y=mx+n$ ……㋑ が点Aで交わっているとき，

①　連立方程式 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=mx+n \end{cases}$ の解が㋐と㋑の交点Aの座標を表す。

②　㋐，㋑のそれぞれの切片が y 軸との交点B，Cの y 座標を表す。

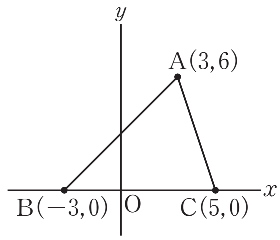
③　㋐，㋑に $y=0$ をそれぞれ代入して得られる x の値が x 軸との交点D，Eの x 座標を表す。

❹ グラフと図形

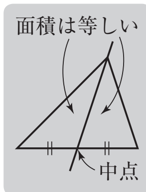
▶チェック問題 ⇨ P80，81

学習の基本 ［1］ 三角形の面積の２等分⑴ 〜頂点を通る直線〜

問題 **右の図で，頂点Aを通り，△ABCの面積を２等分する直線の式を求めよ。**



解 右の図のように，三角形の１つの頂点を通り，向かい合う辺の中点を通る直線は，三角形の面積を２等分するから，A(3，6)を通り，線分BCの中点を通る直線の式を求めればよい。



線分BCの中点は，$\left(\dfrac{-3+5}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)=(1,\ 0)$

だから，２点A(3，6)，(1，0)を通る直線の式を求めればよい。

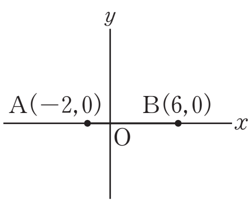
２点$(a,\ b)$，$(c,\ d)$を結ぶ線分の中点の座標は，$\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b+d}{2}\right)$

答 $y=3x-3$

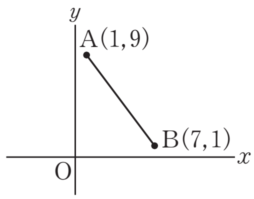
➡底辺の長さと高さが等しい２つの三角形は，面積が等しい。

1 次の図で，線分ABの中点の座標を求めよ。

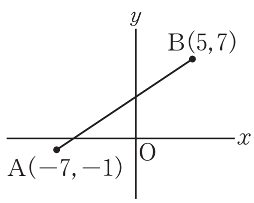
□⑴



□⑵

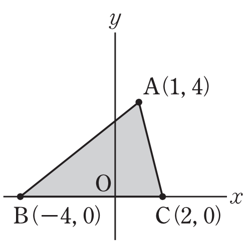


□⑶

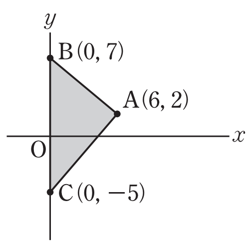


2 次の図で，頂点Aを通り，△ABCの面積を２等分する直線の式を求めよ。

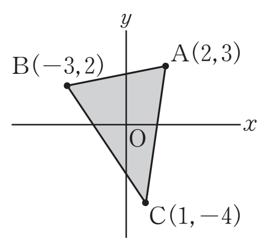
□⑴



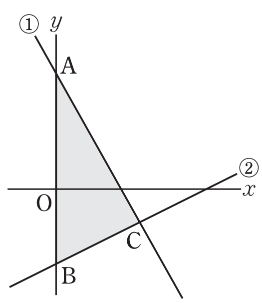
□⑵



□⑶



3 右の図のように，２直線 $y=-2x+6$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}x-4$ ……② がある。y軸と直線①，直線②との交点をそれぞれA，B，直線①と②の交点をCとする。このとき，次の問いに答えよ。

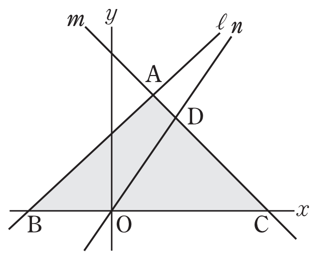


□⑴ 点Cの座標を求めよ。

□⑵ 点Bを通り，△ABCの面積を２等分する直線の式を求めよ。

学習の基本　2　三角形の面積の２等分⑵　～辺上の点を通る直線～

問題　**右の図で，2 直線 ℓ，m は，それぞれ関数 $y=x+4$，$y=-x+8$ のグラフである。点Aは ℓ と m の交点で，2 点B，Cはそれぞれ x 軸と ℓ，m との交点である。このとき，原点Oを通り，△ABCの面積を 2 等分する直線 n の式を求めよ。**



解　$\begin{cases} y=x+4 \\ y=-x+8 \end{cases}$ を解いて，A(2，6)　また，B(−4，0)，

C(8，0)となるから，△ABCの面積は，$\frac{1}{2}\times\{8-(-4)\}\times6=36$

直線 m と n の交点をDとし，点Dの y 座標を t とすると，△DOCの面積は△ABCの面積の

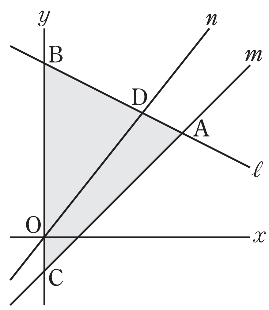
$\frac{1}{2}$ だから，$\frac{1}{2}\times8\times t=36\times\frac{1}{2}$，$t=\frac{9}{2}$　点Dの x 座標は，$\frac{9}{2}=-x+8$，$x=\frac{7}{2}$

D$\left(\frac{7}{2},\ \frac{9}{2}\right)$ より，直線 n の傾きは，$\frac{9}{2}\div\frac{7}{2}=\frac{9}{7}$　よって，直線 n の式は，$y=\frac{9}{7}x$

答　$y=\frac{9}{7}x$

➡点の座標を未知数とし，三角形の面積についての方程式をつくる。

4　右の図で，2 直線 ℓ，m は，それぞれ関数 $y=-\frac{1}{2}x+10$，$y=x-2$ のグラフである。点Aは ℓ と m の交点で，2 点B，Cはそれぞれ y 軸と ℓ，m との交点である。次の問いに答えよ。

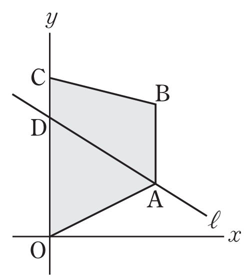


□⑴　△ABCの面積を求めよ。

⑵　原点Oを通り，△ABCの面積を 2 等分する直線を n とし，直線 ℓ と n の交点をDとする。このとき，次の①，②を求めよ。

□①　点Dの x 座標　　　　□②　直線 n の式

5　右の図のように，4 点O(0，0)，A(4，2)，B(4，5)，C(0，6)を頂点とする台形OABCがある。次の問いに答えよ。



□⑴　台形OABCの面積を求めよ。

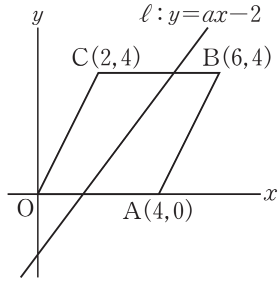
⑵　点Aを通る直線 ℓ が台形OABCの面積を 2 等分するとき，次の①，②を求めよ。

□①　直線 ℓ と y 軸の交点Dの座標　　　　□②　直線 ℓ の式

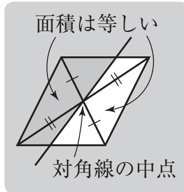
★ **6**　□ 上の **5** の図において，点E(0，2)を通る直線 m と辺ABの交点をFとすると，台形OAFEの面積は台形OABCの面積の $\frac{1}{3}$ になる。このとき，直線 m の式を求めよ。

学習の基本　3　平行四辺形の面積の2等分

問題　**右の図で，直線ℓ：$y=ax-2$が平行四辺形OABCの面積を2等分するとき，aの値を求めよ。**



解　平行四辺形は対角線の交点(対角線の中点)を通る直線で，面積が2等分される。



よって，直線ℓが線分OBの中点

$\left(\dfrac{0+6}{2},\ \dfrac{0+4}{2}\right)=(3,\ 2)$を通ればよいから，$y=ax-2$に，$x=3$，$y=2$を代入して，

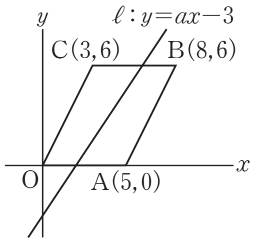
$2=3a-2$，$a=\dfrac{4}{3}$

答　$a=\dfrac{4}{3}$

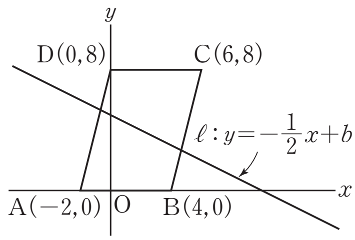
➡平行四辺形は対角線の交点を通る直線によって，合同な2つの図形に分けられる。

7　次の図で，直線ℓが平行四辺形の面積を2等分するとき，aやbの値を求めよ。

□(1)

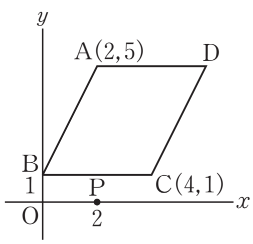


□(2)

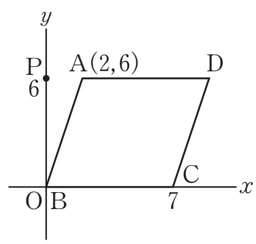


8　次の図で，四角形ABCDは平行四辺形である。点Pを通り，平行四辺形ABCDの面積を2等分する直線の式を求めよ。

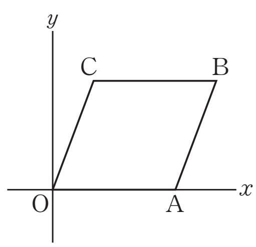
□(1)



□(2)



9　右の図で，四角形OABCは平行四辺形で，点A，Cの座標はそれぞれ(9，0)，(3，8)である。



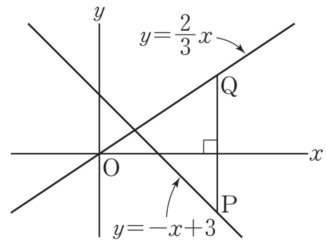
□(1)　点Bの座標を求めよ。

□(2)　線分ACと線分OBの交点の座標を求めよ。

□(3)　点P(3，0)を通り，平行四辺形OABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。

学習の基本　4　線分の長さと方程式(1)

問題　**右の図で，2点P，Qはそれぞれ直線 $y=-x+3$, $y=\dfrac{2}{3}x$ 上にあり，線分PQは x 軸に垂直である。PQ=7 のとき，点Pの x 座標を求めよ。**



解　点Pの x 座標を t とすると，$P(t,\ -t+3)$，$Q\left(t,\ \dfrac{2}{3}t\right)$

と表されるから，$\dfrac{2}{3}t-(-t+3)=\dfrac{5}{3}t-3$

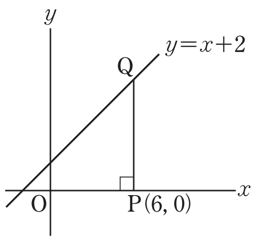
PQ=7 だから，$\dfrac{5}{3}t-3=7$，$t=6$

答　6

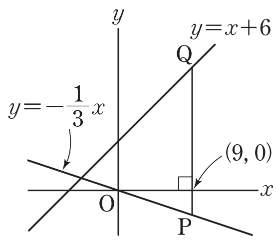
➡ y 軸に平行な線分の長さは y 座標の差，x 軸に平行な線分の長さは x 座標の差。

10 次の図で，線分PQの長さを求めよ。

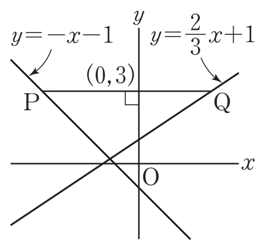
□(1)



□(2)

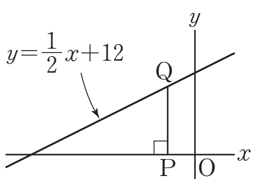


□(3)

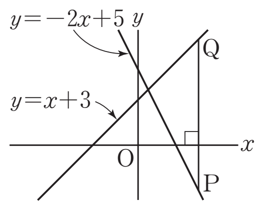


11 次の図で，2点P，Qが図のような位置にあり，PQ=10 であるとき，点Pの x 座標を求めよ。

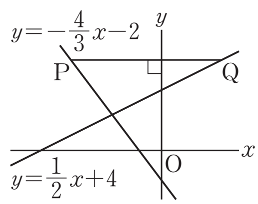
□(1)



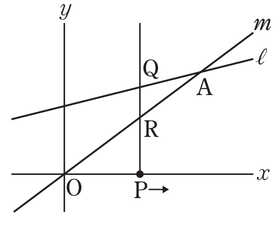
□(2)



□(3)



12 右の図で，直線 ℓ の式は $y=\dfrac{1}{4}x+6$，直線 m の式は $y=\dfrac{3}{4}x$ である。点Pは x 軸上の正の部分を動く点で，点Aより左側にある。また，点Pを通り y 軸に平行な直線と直線 ℓ，m との交点をそれぞれQ，Rとする。点Pの x 座標を t として，次の問いに答えよ。



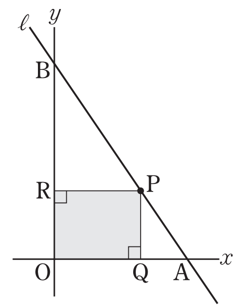
□(1)　線分QRの長さを t を使って表せ。

□(2)　線分QRの長さが3となるときの点Pの座標を求めよ。

□(3)　QR=RP となるときの点P，Qの座標をそれぞれ求めよ。

学習の基本 5 線分の長さと方程式(2) ～正方形～

問題 右の図で，直線 ℓ は関数 $y=-\frac{3}{2}x+5$ のグラフで，2点A，Bは，それぞれ直線 ℓ と x 軸，y 軸との交点である。線分AB上に点Pをとり，x 軸，y 軸に垂線PQ，PRをそれぞれひく。原点をOとして，次の問いに答えよ。



(1) 点Pの x 座標を t とするとき，線分PQの長さを t を使って表せ。

(2) 四角形OQPRが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

解 (1)線分PQの長さは点Pの y 座標に等しいから，$\mathrm{PQ}=-\frac{3}{2}t+5$

(2)PQ＝PRとなればよい。PR＝t であるから，$-\frac{3}{2}t+5=t$，$t=2$

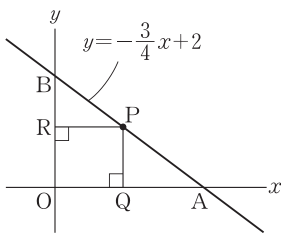
このとき，点Pの y 座標は，$-\frac{3}{2}\times2+5=2$

答 (1) $\mathrm{PQ}=-\frac{3}{2}t+5$　　(2) (2，2)

➡求める点の x 座標を t とおき，辺の長さについての方程式をつくる。

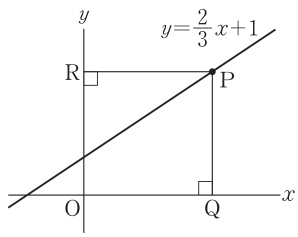
13 次の図で，四角形OQPRが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

□(1)



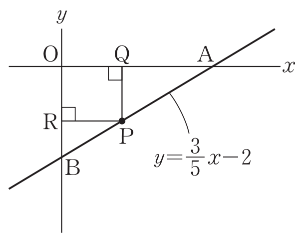
(点Pは線分AB上)

□(2)



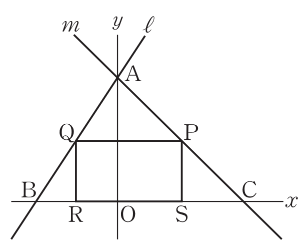
(点Pの x 座標は正)

□(3)



(点Pは線分AB上)

★**14** 右の図で，直線 ℓ，m はそれぞれ $y=\frac{3}{2}x+7$，$y=-x+7$ のグラフであり，点Aは ℓ，m および y 軸の交点，点B，Cはそれぞれ ℓ，m と x 軸との交点である。点P，Qをそれぞれ線分AC，AB上，点R，Sを x 軸上に，四角形PQRSが長方形になるようにとる。点Pの x 座標を t として，次の問いに答えよ。



□(1) 点Pの y 座標を t を使って表せ。

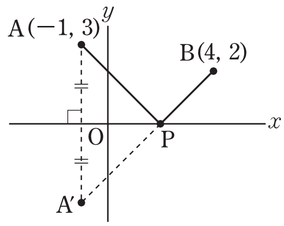
□(2) 点Qの x 座標を t を使って表せ。

□(3) 線分PQの長さを t を使って表せ。

□(4) 四角形PQRSが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

研究セミナー　最短距離

問題　**右の図のように，2点A(−1，3)，B(4，2)がある。x軸上に点Pをとり，AP+PBの長さが最短になるようにしたときの点Pの座標を求めよ。**



解　点Aとx軸について対称な点をA′とすると，AP=A′Pだから，AP+PB=A′P+PBとなる。よって，A′PBが一直線になるとき，AP+PBの長さは最短になる。

直線A′Bの式を$y=ax+b$とすると，A′(−1，−3)，B(4，2)を通ることより，

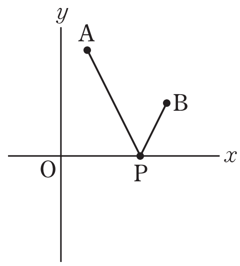
$\begin{cases} -3=-a+b \\ 2=4a+b \end{cases}$　これを解いて，$a=1$，$b=-2$より，$y=x-2$

点Pのy座標は0だから，x座標は，$0=x-2$より，$x=2$　よって，P(2，0)

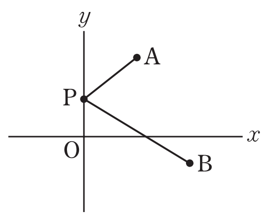
答　(2，0)

➡ x軸に対称な点はy座標の正負が逆，y軸に対称な点はx座標の正負が逆。

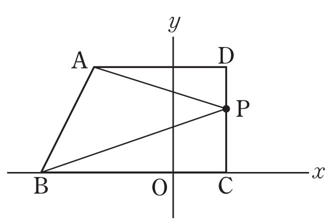
問題1　右の図のように，2点A(2，8)，B(8，4)がある。
□x軸上に点Pをとり，AP+PBの長さが最短になるようにしたときの点Pの座標を求めよ。



問題2　右の図のように，2点A(4，6)，B(8，−2)がある。
□y軸上に点Pをとり，AP+PBの長さが最短になるようにしたときの点Pの座標を求めよ。



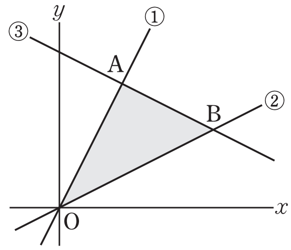
★ **問題3**　右の図の台形ABCDで，A(−3，4)，B(−5，0)，
□C(2，0)，D(2，4)である。辺CD上に点Pをとり，AP+PBの長さが最短になるようにしたときの点Pの座標を求めよ。



●●●●● チェック問題① ●●●●●　4　グラフと図形

レベル1

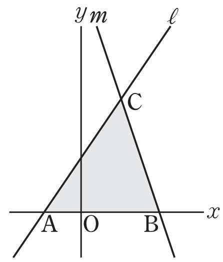
1 右の図のように，3直線 $y=2x$ ……①，$y=\frac{1}{2}x$ ……②，$y=-\frac{1}{2}x+10$ ……③ がある。直線①と③の交点をA，直線②と③の交点をBとするとき，次の問いに答えよ。 ➡学 1



□(1)　点A，Bの座標をそれぞれ求めよ。

□(2)　点Bを通り，△OABの面積を2等分する直線の式を求めよ。

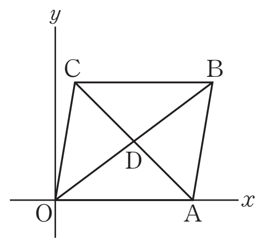
2 右の図で，直線 ℓ はA(−4，0)を通り傾きが $\frac{3}{2}$，直線 m はB(8，0)を通り，ℓ と m は点Cで交わっている。次の問いに答えよ。 ➡学 2



□(1)　直線 ℓ の式を求めよ。

□(2)　点Cの x 座標が4のとき，原点Oを通り，△ABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。

3 右の図のように，平行四辺形OABCがあり，点A，Cの座標はそれぞれ(7，0)，(1，6)である。対角線ACとOBの交点をDとするとき，次の問いに答えよ。 ➡学 3



□(1)　点Bの座標を求めよ。

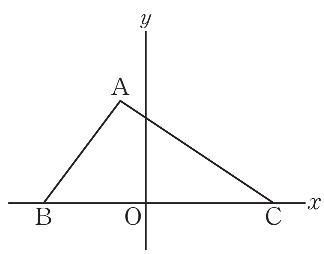
□(2)　点Dの座標を求めよ。

□(3)　直線 $y=x+b$ が平行四辺形OABCの面積を2等分するとき，b の値を求めよ。

□(4)　点(6，0)を通る直線 ℓ が平行四辺形OABCの面積を2等分するとき，ℓ の式を求めよ。

レベル2

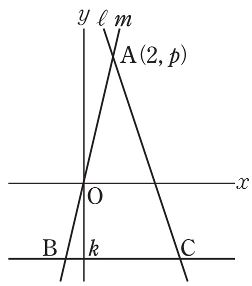
4 □ 右の図のように，3点A(−1，4)，B(−4，0)，C(5，0)を頂点とする△ABCがある。原点Oを通り，△ABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。



チェック問題②　4　グラフと図形

レベル1

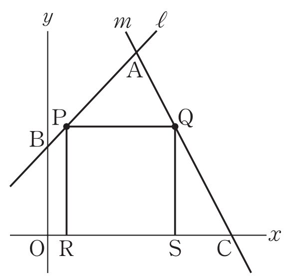
1 右の図で，直線 ℓ は関数 $y=-3x+15$ のグラフで，A$(2,\ p)$は直線 ℓ 上にある。原点Oと点Aを通る直線を m とするとき，次の問いに答えよ。 ➡学 4



□(1)　交点Aの y 座標 p と，直線 m の式をそれぞれ求めよ。

□(2)　直線 $y=k$ と 2 直線 m，ℓ との交点をそれぞれB，Cとする。BC$=10$ となる k の値を求めよ。ただし，$k<0$ とする。

2 右の図で，直線 ℓ，m はそれぞれ $y=x+4$，$y=-2x+16$ のグラフであり，点Aは ℓ と m の交点，点Bは ℓ と y 軸の交点，点Cは m と x 軸の交点である。点P，Qをそれぞれ線分AB，AC上，点R，Sを x 軸上に，四角形PRSQが長方形になるようにとる。次の問いに答えよ。 ➡学 5

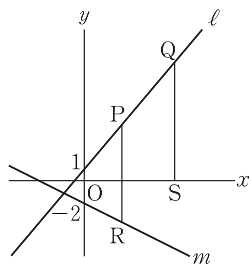


□(1)　点Pの x 座標を t とするとき，点Qの x 座標を t を使って表せ。

□(2)　四角形PRSQが正方形になるときの点Pの座標を求めよ。

レベル2

3 右の図で，直線 ℓ，m の式はそれぞれ $y=\dfrac{3}{4}x+1$，$y=-\dfrac{1}{2}x-2$ であり，点P，Qは直線 ℓ 上の点である。点P，Qを通り y 軸に平行な直線と直線 m，x 軸との交点をそれぞれR，Sとする。点Pの x 座標が正で，点Qの x 座標が点Pの x 座標より 6 大きいとき，次の問いに答えよ。



□(1)　点Pの x 座標を t として，線分PRの長さを t を使って表せ。

□(2)　四角形PRSQが平行四辺形となるとき，点Pの座標を求めよ。

□(3)　(2)のとき，原点を通り，平行四辺形PRSQの面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

3章の確認

1　**1次関数**　下の(1)〜(4)にあてはまるものを，次の式の中からそれぞれすべて選び，記号で答えよ。

ア　$y=x+6$　　**イ**　$y=2x+3$　　**ウ**　$y=\dfrac{6}{x}$　　**エ**　$y=-3x+6$

□(1)　y は x の１次関数である。

□(2)　x の値が増加するとき，対応する y の値も増加する。

□(3)　グラフが y 軸上の同じ点を通る。

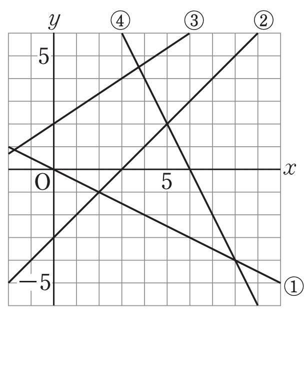
□(4)　x の変域が $0\leqq x\leqq 2$ のとき，y の変域は $0\leqq y\leqq 6$ である。

2　**1次関数の求め方**　次の問いに答えよ。

□(1)　変化の割合が -2 で，$x=3$ のとき $y=0$ である１次関数を求めよ。

□(2)　２点 $(12,\ 1)$，$(3,\ -2)$ を通る直線の式を求めよ。

3　**1次関数と方程式**　右の図について，次の問いに答えよ。

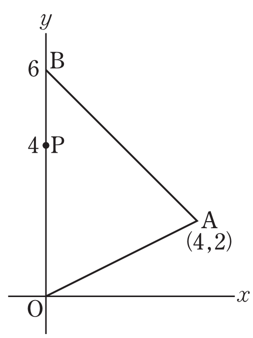


□(1)　①〜④の直線の式を求めよ。

□(2)　連立方程式 $\begin{cases} y=x-3 \\ y=-2x+12 \end{cases}$ の解を，右の図を利用して求めよ。

□(3)　直線③と④の交点の座標を求めよ。

4　**グラフと図形**　右の図のように，３点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 6)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ と，点 $\mathrm{P}(0,\ 4)$ がある。このとき，次の問いに答えよ。



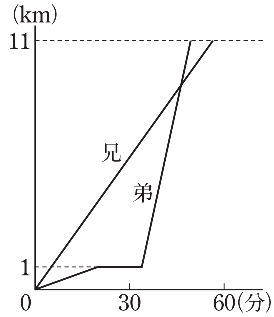
□(1)　点Aを通り，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を２等分する直線の式を求めよ。

□(2)　点Pを通り，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を２等分する直線の式を求めよ。

3 章の応用

1 兄と弟が9時ちょうどに家を出発し，同じ道を通って，家から11km離れた遊園地に向かった。兄は自転車に乗り時速12kmで進み，弟は1km離れたバス停まで時速3kmで歩き，そこで13分間待ち，バスに15分間乗って遊園地に着いた。

右の図は，兄と弟が家を出発してから遊園地に着くまでの，時間と道のりの関係をグラフに表したものである。

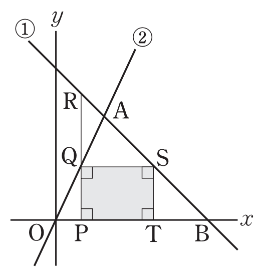


□(1) 弟が遊園地に到着したのは何時何分か。

□(2) 弟の乗ったバスが兄の自転車に追いついたのは，家から何kmの地点か。

2 右の図で，直線①，②はそれぞれ $y=-x+12$，$y=2x$ のグラフである。直線①と直線②，x 軸との交点をそれぞれA，Bとする。x 軸上の点Pから y 軸に平行な直線をひき，直線②，①との交点をそれぞれQ，Rとする。また，図のように長方形PTSQを作る。

このとき，次の問いに答えよ。

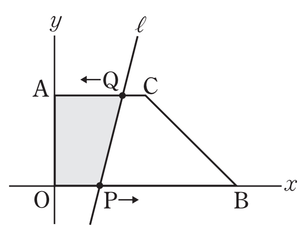


□(1) △AOBの面積を求めよ。

□(2) 点Pの x 座標が2のとき，長方形PTSQの面積を求めよ。

□(3) 点Qが線分OA上にあり，PQ＝QR となるときの点Pの座標を求めよ。

★ **3** 4点A(0, 6)，O(0, 0)，B(12, 0)，C(6, 6)を頂点とする台形がある。点P，Qはそれぞれ点O，Cを同時に出発して，Pは辺OB上をBまで秒速2cmで，Qは辺CA上をAまで秒速1cmで動く。2点P，Qを通る直線を ℓ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，座標軸の1目もりを1cmとする。



□(1) 点Pの座標が(3, 0)のとき，直線 ℓ の式を求めよ。

□(2) 出発してから t 秒後$(0 \leqq t \leqq 6)$の台形AOPQの面積を S cm^2 として，S を t の式で表せ。

□(3) 台形AOPQの面積が台形AOBCの面積の $\frac{5}{9}$ 倍になるのは，出発してから何秒後か。