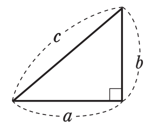
7章　三平方の定理

◆◇学習の要点◇◆

❶ 三平方の定理 ☞P163～

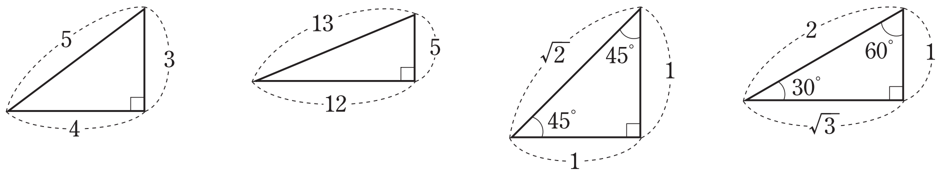
(1)　三平方の定理とその逆

① 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立つ。(**三平方の定理**)



② 三角形の3辺の長さを a，b，c とするとき，$a^2+b^2=c^2$ が成り立てば，その三角形は長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。(**三平方の定理の逆**)

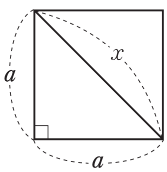
(2)　特別な直角三角形の3辺の比



❷ 三平方の定理と平面図形 ☞P168～

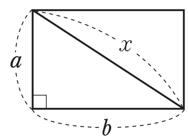
(1)　正方形の対角線の長さ

$x=\sqrt{2}\,a$



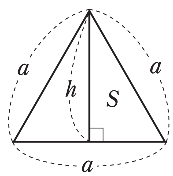
(2)　長方形の対角線の長さ

$x=\sqrt{a^2+b^2}$



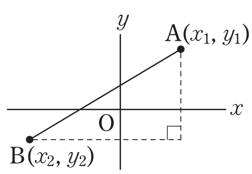
(3)　正三角形の高さ，面積

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$



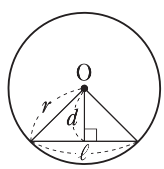
(4)　2点間の距離

$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



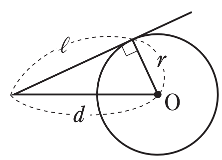
(5)　円の弦の長さ

$\ell=2\sqrt{r^2-d^2}$



(6)　円の接線の長さ

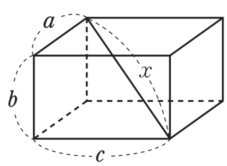
$\ell=\sqrt{d^2-r^2}$



❸ 三平方の定理と空間図形 ☞P176～

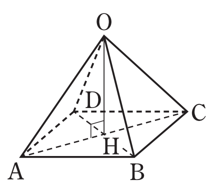
(1)　直方体の対角線の長さ

$x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



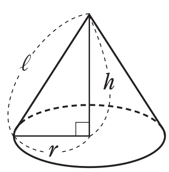
(2)　正四角錐の高さ

$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}$



(3)　円錐の高さ

$h=\sqrt{\ell^2-r^2}$



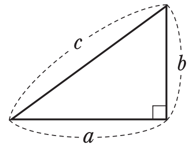
❶ 三平方の定理

▶チェック問題 ⇨ P167

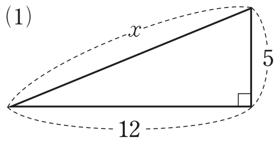
学習の基本　1　三平方の定理

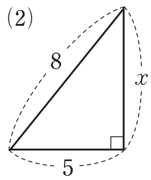
直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，

$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。



問題　**右の図で，x の値を求めよ。**





解　(1)三平方の定理より，$x^2=12^2+5^2=169$

$x>0$ より，$x=\sqrt{169}=13$

(2)三平方の定理より，$5^2+x^2=8^2$ だから，

$x^2=8^2-5^2=39$

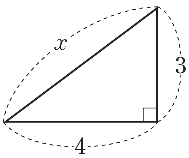
$x>0$ より，$x=\sqrt{39}$

答　(1)　$x=13$　　(2)　$x=\sqrt{39}$

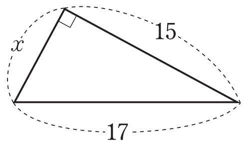
➡どの辺が斜辺(最長の辺)であるかに注目して式を立てよう。

1　次の図で，x の値を求めよ。

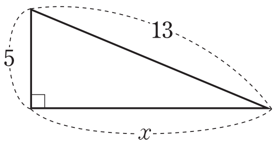
□(1)



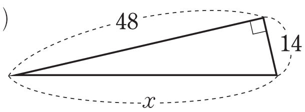
□(2)



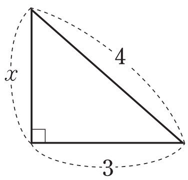
□(3)



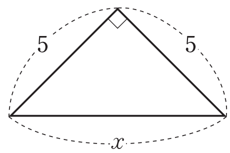
□(4)



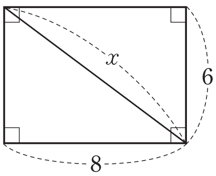
□(5)



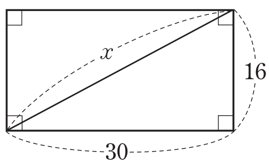
□(6)



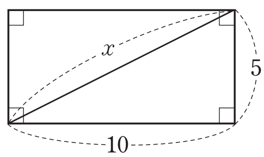
□(7)



□(8)

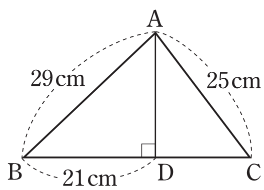


□(9)



2　右の図で，AD⊥BC である。次の線分の長さを求めよ。

□(1)　AD　　　□(2)　DC



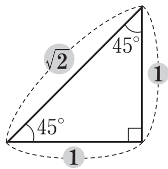
7章

学習の基本　2　特別な直角三角形

特別な角をもつ三角形(三角定規の形)の3辺の比は，次の図のようになる。

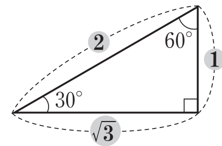
① 45°，45°，90°型

$1:1:\sqrt{2}$



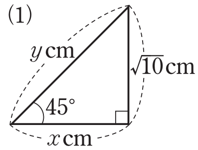
② 30°，60°，90°型

$1:2:\sqrt{3}$

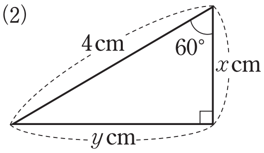


問題　**右の図で，x，y の値をそれぞれ求めよ。**

(1)



(2)



解　(1) $x:\sqrt{10}=1:1$ より，$x=\sqrt{10}$

$y:\sqrt{10}=\sqrt{2}:1$ より，$y=2\sqrt{5}$

(2) $x:4=1:2$ より，$2x=4$，$x=2$

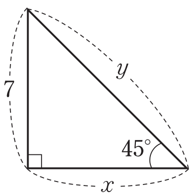
$4:y=2:\sqrt{3}$ より，$2y=4\sqrt{3}$，$y=2\sqrt{3}$

答　(1)　$x=\sqrt{10}$，$y=2\sqrt{5}$　　(2)　$x=2$，$y=2\sqrt{3}$

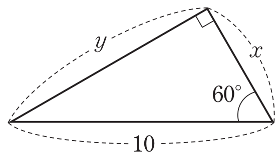
➡三角定規の3辺の長さの比を覚えよう。

3　次の図で，x，y の値をそれぞれ求めよ。

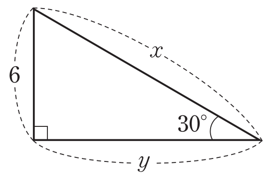
□(1)



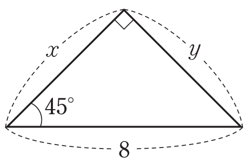
□(2)



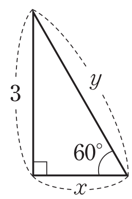
□(3)



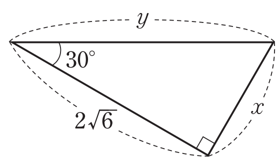
□(4)



□(5)

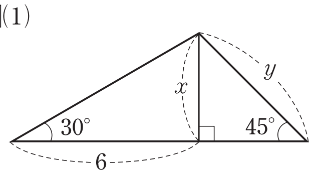


□(6)

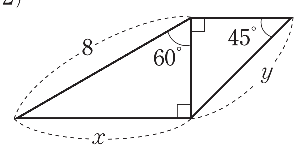


4　次の図で，x，y の値をそれぞれ求めよ。

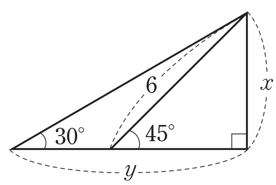
□(1)



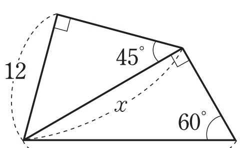
□(2)



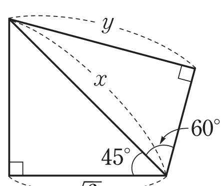
□(3)



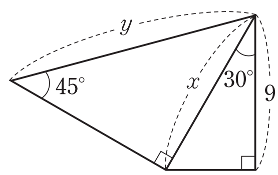
□(4)



□(5)

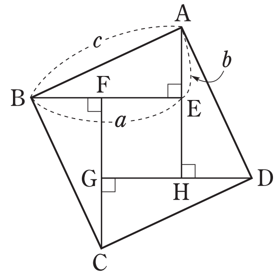


□(6)



学習の基本 ③ 三平方の定理の証明

問題　右の図は，直角をはさむ 2 辺が a，b $(a>b)$，斜辺が c の直角三角形を 4 つ並べて，正方形ABCDを作ったものである。この図を使って，三平方の定理を証明せよ。



答　4 つの直角三角形の面積の和は，$\dfrac{1}{2}ab\times4=2ab$

正方形EFGHは，1 辺の長さが $a-b$ だから，

面積は $(a-b)^2$

4 つの直角三角形の面積と正方形EFGHの面積の和は，

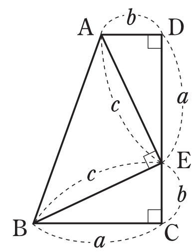
$2ab+(a-b)^2=2ab+(a^2-2ab+b^2)=a^2+b^2$　……①

正方形ABCDは，1 辺の長さが c だから，面積は c^2 ……②

①と②は等しいから，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

➡三平方の定理の証明にはいろいろなパターンがある。下の問題で確認しよう。

5　直角をはさむ 2 辺が a，b，斜辺が c の 2 つの直角三角形を，右の図のように組み合わせて台形ABCDを作った。この図を使って，三平方の定理を証明したい。$\boxed{}$にあてはまるものを答えよ。



〔証明〕　台形ABCDの面積を a，b の式で表すと，$\boxed{\text{ア}}$

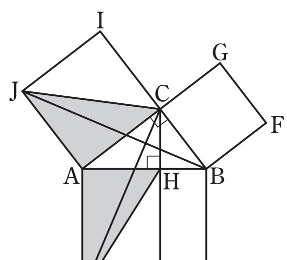
△ADEと△ECBの面積の和を a，b の式で表すと，$\boxed{\text{イ}}$

△ABEの面積を c の式で表すと，$\boxed{\text{ウ}}$

よって，△ABEの面積について，$\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}=\dfrac{1}{2}c^2$ であるから，

$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

6　右の図のように，$\angle ACB=90^\circ$ である直角三角形ABCの各辺をそれぞれ 1 辺とする正方形ADEB，BFGC，ACIJを作り，CからABへひいた垂線をCH，その延長とDEの交点をKとして，$AC^2+BC^2=AB^2$ を証明したい。$\boxed{}$にあてはまるものを答えよ。



〔証明〕

底辺が共通で高さが等しいから，△ACJ＝△ABJ…①

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ABJ≡△$\boxed{\text{ア}}$…②

さらに，底辺が共通で高さが等しいから，△$\boxed{\text{イ}}$＝△ADH…③

①〜③より，△ACJ＝△$\boxed{\text{ウ}}$…④

ここで，正方形ACIJ＝2△$\boxed{\text{エ}}$…⑤

長方形ADKH＝2△$\boxed{\text{オ}}$…⑥

④〜⑥より，正方形ACIJ＝長方形$\boxed{\text{カ}}$…⑦

同様にして，正方形BFGC＝長方形$\boxed{\text{キ}}$…⑧

⑦，⑧から，正方形ACIJ＋正方形BFGC＝正方形$\boxed{\text{ク}}$

しがたって，$AC^2+BC^2=AB^2$ が成り立つ。

学習の基本　4　三平方の定理の逆

三角形の3辺の長さを a，b，c とするとき，$a^2+b^2=c^2$ が成り立てば，その三角形は長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。

問題　**次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形であるものをすべて選び，記号で答えよ。**

ア　5 cm，7 cm，8 cm　　イ　9 cm，11 cm，15 cm　　ウ　8 cm，15 cm，17 cm

解　最長の辺の長さを c，他の2辺の長さを a，b とし，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つかどうか調べる。

ア…$5^2+7^2=74$，$8^2=64$　　イ…$9^2+11^2=202$，$15^2=225$　　ウ…$8^2+15^2=289$，$17^2=289$

答　ウ

➡ a^2+b^2 と c^2 の値が等しくなるか調べよう。

7　次の問いに答えよ。

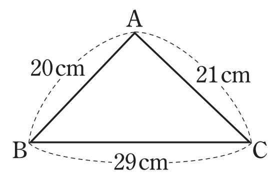
□(1)　次の長さを3辺とする三角形のうち，直角三角形であるものをすべて選び，記号で答えよ。

ア　5 cm，6 cm，8 cm　　**イ**　9 cm，40 cm，41 cm

ウ　$\sqrt{3}$ m，2 m，$\sqrt{7}$ m　　**エ**　$\sqrt{13}$ cm，4 cm，$2\sqrt{7}$ cm

オ　$\frac{3}{10}$ m，$\frac{2}{5}$ m，$\frac{1}{2}$ m　　**カ**　1.2 cm，1.4 cm，2 cm

□(2)　右の図の△ABCは直角三角形であることを証明せよ。



8　次の問いに答えよ。

(1)　3辺の長さが次のような三角形は直角三角形であることを証明せよ。

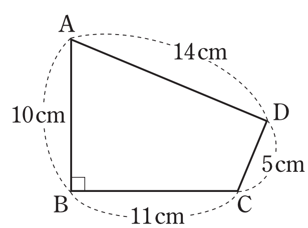
□①　$2\sqrt{x}$，$x-1$，$x+1$（$x>1$ とする）　　□②　m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2（$m>n>0$ とする）

□(2)　3辺の長さが $x-3$，x，$x+3$ である三角形がある。この三角形が直角三角形となるような x の値を求めよ。

9　右の図の四角形ABCDで，∠B＝90°，AB＝10 cm，BC＝11 cm，CD＝5 cm，DA＝14 cm である。

□(1)　∠ADC＝90° であることを証明せよ。

□(2)　四角形ABCDの面積を求めよ。

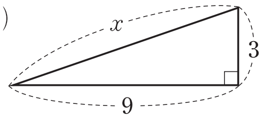


チェック問題　1　三平方の定理

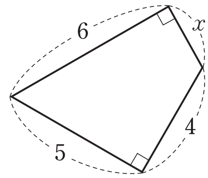
レベル1

1　次の図で，x の値を求めよ。　➡学 ①

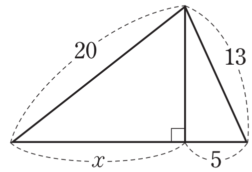
□(1)



□(2)

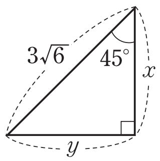


□(3)

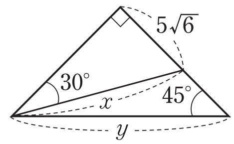


2　次の図で，x，y の値をそれぞれ求めよ。　➡学 ②

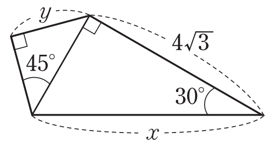
□(1)



□(2)



□(3)



3　次の問いに答えよ。　➡学 ①

□(1)　縦 9 cm，横 2 cmの長方形の対角線の長さを求めよ。

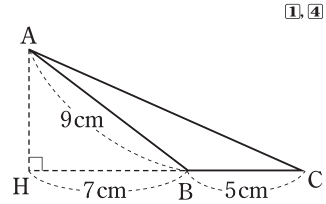
□(2)　対角線の長さが10cmの正方形の 1 辺の長さを求めよ。

□(3)　2 つの対角線の長さが18cm，24cmのひし形の 1 辺の長さを求めよ。

4　次の問いに答えよ。　➡学 ①,④

(1)　右の図で，AH⊥HC，AB＝9cm，BH＝7cm，BC＝5cm である。次の線分の長さを求めよ。

□①　AH　　□②　AC



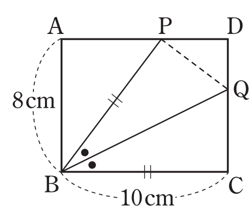
□(2)　長さが 8 cm，10cm，12cmの 3 本の針金から同じ長さを切り取り，それぞれの残りを 3 辺とする直角三角形を作りたい。切り取る長さを何cmにすればよいか。

□(3)　斜辺の長さが20cmで，直角をはさむ辺の長さの和が28cmである直角三角形の面積を求めよ。

レベル2

5　右の図の長方形ABCDで，BP＝BC，∠PBQ＝∠CBQ である。次の線分の長さを求めよ。

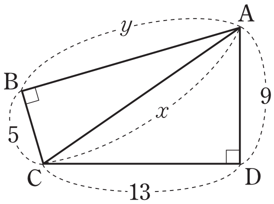
□(1)　PD　　□(2)　BQ



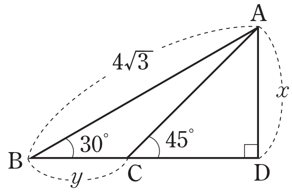
7章の確認

1 **三平方の定理と直角三角形**　次の図で，x，y の値を求めよ。

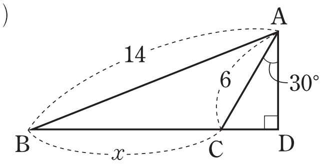
□(1)



□(2)



□(3)



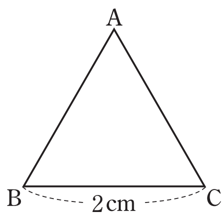
2 **三平方の定理の逆**　次の長さを 3 辺とする三角形のうち，直角三角形であるものをすべて
□選び，記号で答えよ。

ア　7 cm，8 cm，9 cm　　　**イ**　10 cm，24 cm，26 cm

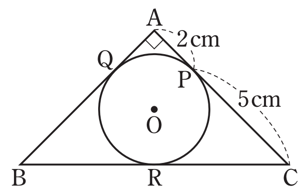
ウ　$\sqrt{3}$ cm，2 cm，$\sqrt{5}$ cm　　　**エ**　2.4 cm，7 cm，7.4 cm

3 **三平方の定理と平面図形**　次のものを求めよ。

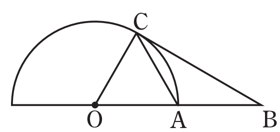
□(1)　右の図のような，1 辺が 2 cm の正三角形の面積



□(2)　右の図で，点 P，Q，R がそれぞれ円 O と各辺との接点であるとき，辺 AB，BC の長さ



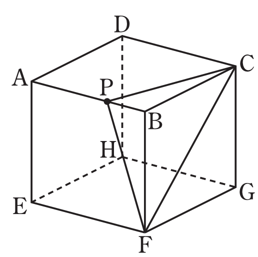
4 **三平方の定理と円**　右の図のように，半径 8 cm の半円 O に，線分 OA の延長上の点 B から接線をひき，その接点を C とする。点 A と C，点 O と C を結ぶと，△OAC は正三角形になった。次の問いに答えよ。



□(1)　線分 BC の長さを求めよ。

□(2)　△ABC の面積を求めよ。

5 **三平方の定理と空間図形**　1 辺 12 cm の立方体の辺 AB 上に，AP：PB＝2：1 となるような点 P をとる。次の問いに答えよ。

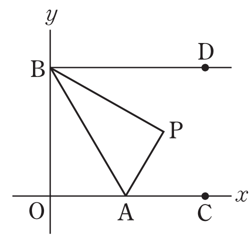


□(1)　線分 PC の長さを求めよ。

□(2)　△PFC の面積を求めよ。

7章の応用

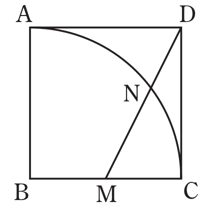
1　右の図で，A(1，0)，B(0，$\sqrt{3}$)，C(2，0)，D(2，$\sqrt{3}$)であり，点Pは∠ABDの二等分線と∠BACの二等分線の交点である。次の問いに答えよ。



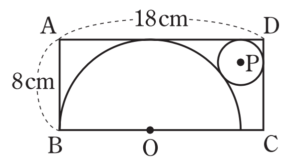
□(1)　点Pの座標を求めよ。

□(2)　3点A，B，Pを通る円の半径を求めよ。

★ **2**　右の図で，四角形ABCDは1辺が10cmの正方形で，点Mは辺BCの中点である。点Bを中心とする半径10cmの円の$\overset{\frown}{AC}$と線分DMとの交点をNとするとき，線分MNの長さを求めよ。
□

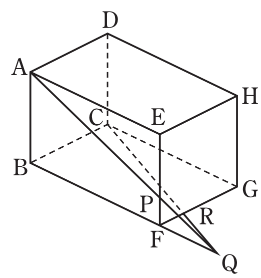


★ **3**　右の図で，半円Oは長方形ABCDの辺AB，ADに接し，円Pは長方形の辺AD，CDに接している。また，半円Oと円Pは接している。円Pの半径を求めよ。
□



★★ **4**　右の図のように，面ABCDが正方形の直方体ABCD−EFGHの辺EF上に点Pを，AP＋PGが最小となるようにとり，線分APの延長と辺BFの延長との交点をQとして，頂点Cと点Qを結ぶ。また，線分CQと辺FGとの交点をRとする。

　AB＝4cm，AE＝8cmのとき，次の問いに答えよ。



□(1)　AP＋PGの長さを求めよ。

□(2)　△APCの面積を求めよ。

★★ **5**　右の図の平行四辺形ABCDにおいて，対角線BD上にBE＝DFとなるように点E，Fをとる。ただし，BE＜$\frac{1}{2}$BD，AC＜BDとする。AB＝5cm，BC＝6cm，平行四辺形ABCDの面積が24cm^2，四角形AECFの面積が16cm^{2}のとき，線分AFの長さを求めよ。
□