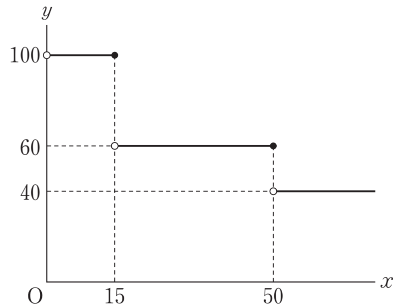
学習の基本 10 いろいろな関数

問題　右のグラフは，ある電話会社のサービスを使い，平日の 8:00〜19:00 に市外通話するときの通話する 2 地点間の距離 x km と10円で通話できる時間 y 秒の関係を表したものである。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　2 地点間の距離が 13km のとき，10円で通話できるのは何秒か。

(2)　y は x の関数であるといえるか。

(3)　$y=60$ のときの x の変域を不等号を使って表せ。

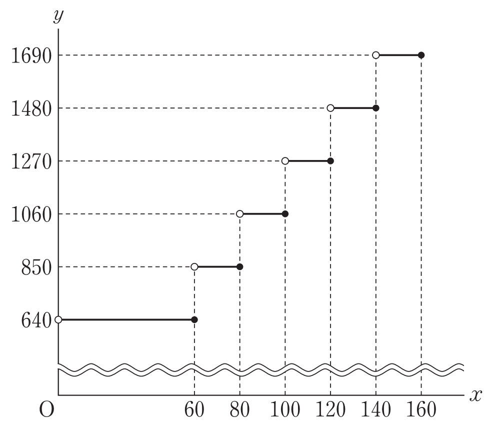
〔注〕　右のようなグラフでは，• はふくまれることを表し，∘ はふくまれないことを表す。

解　(1) 2 地点間の距離が 0 km をこえて 15km 以下のときの通話時間は100秒である。
(2) x の値を決めるとそれに対応する y の値も 1 つに決まるから，y は x の関数である。
(3) 10円で60秒通話できるのは，2 地点間の距離が 15km をこえて 50km 以下のときである。

答　(1)　100秒　　(2)　いえる。　　(3)　$15<x\leqq 50$

➡階段状のグラフの読み取り方をマスターしよう。

19　右のグラフは，コンビニエンスストアから同一地域に荷物を送るときの，縦，横，高さの 3 辺の長さの和 x cm とその料金 y 円の関係を表したものである。次の問いに答えよ。

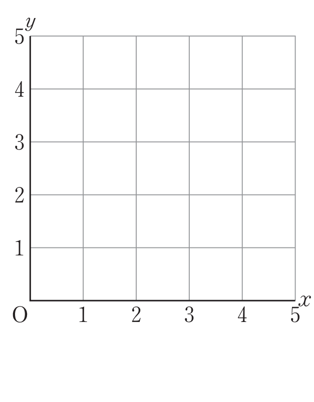


□(1)　縦，横，高さの 3 辺の長さの和が 85 cm の荷物を送るときの料金は何円か。

□(2)　y は x の関数であるといえるか。

□(3)　$y=1270$ のときの x の変域を不等号を使って表せ。

20　x を 0 以上の数とし，x の小数第 1 位以下を切り捨てた値を y とする。このとき，次の問いに答えよ。



□(1)　$x=4.5$ のときの y の値を求めよ。

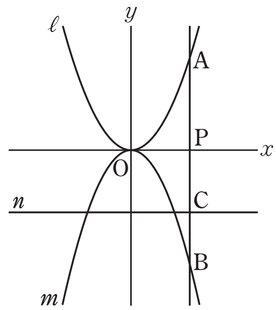
□(2)　y は x の関数であるといえるか。

□(3)　x の変域が $0\leqq x\leqq 5$ のときの x と y の関係を表すグラフをかけ。

チェック問題 1　3　関数のグラフの利用

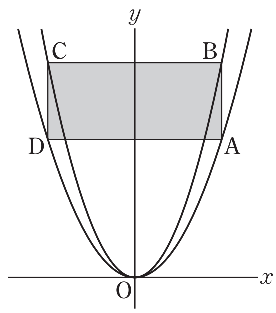
レベル1

★ 学2 AR **1**　右の図で，ℓ は $y=ax^2$ $(a>0)$，m は $y=-x^2$，n は $y=-\dfrac{9}{4}$ のグラフである。x 軸上に点P(2，0)をとり，Pを通り y 軸に平行な直線と ℓ，m，n との交点をそれぞれA，B，Cとする。次のとき，a の値を求めよ。



□(1)　AB＝7　　□(2)　AC＝2CB

★ 学3 AR **2**　右の図のように，関数 $y=\dfrac{2}{3}x^2$，$y=x^2$ のグラフ上に4点A，B，C，DをAD，BCが x 軸と，AB，DCが y 軸と平行になるようにとる。次の問いに答えよ。ただし，点Aの x 座標は正とする。



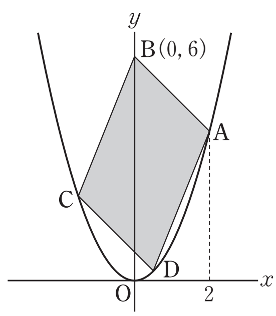
□(1)　点Aの x 座標を t とするとき，点Cの座標を t で表せ。

□(2)　四角形ABCDが正方形となるとき，点Aの座標を求めよ。

□(3)　ABの長さがCBの長さより9長いとき，点Aの座標を求めよ。

レベル2

AR **3**　右の図で，四角形ABCDは平行四辺形で，3つの頂点A，C，Dは関数 $y=x^2$ のグラフ上にある。点Aの x 座標が2，点Bの座標が(0，6)であるとき，次の問いに答えよ。



□(1)　直線ABの式を求めよ。

□(2)　直線ABと $y=x^2$ のグラフの交点のうち，点A以外の点をEとする。点Eの座標を求めよ。

★ □(3)　点C，Dの座標をそれぞれ求めよ。

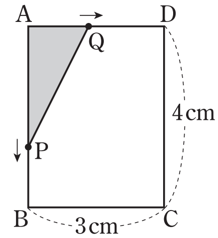
★ □(4)　平行四辺形ABCDの面積を求めよ。

★ □(5)　原点Oを通り，平行四辺形ABCDの面積を2等分する直線の式を求めよ。

チェック問題２　3　関数のグラフの利用

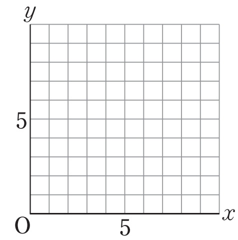
レベル1

学8 AR **1**　右の図のように，BC＝3cm，CD＝4cm の長方形ABCDがある。点Pは頂点Aを出発し，毎秒1cmの速さで辺AB，BC上を頂点Cまで動く。点Qは，点Pと同時に頂点Aを出発し，毎秒0.5cmの速さで辺AD上を頂点Dまで動く。ただし，点Pは頂点Cに，点Qは頂点Dに到達したあとは動かないものとする。2点P，Qが同時に頂点Aを出発してからx秒後の△APQの面積をy cm^{2}とする。次の問いに答えよ。

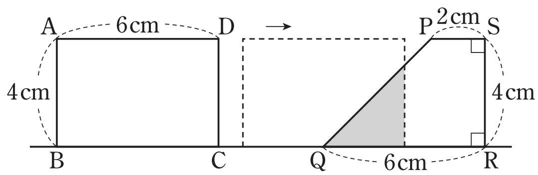


□(1)　点Pが辺AB上を動くとき，xの変域を求めよ。また，そのときのyをxの式で表せ。

□(2)　点Pが頂点AからCまで動くとき，xとyの関係を表すグラフをかけ。



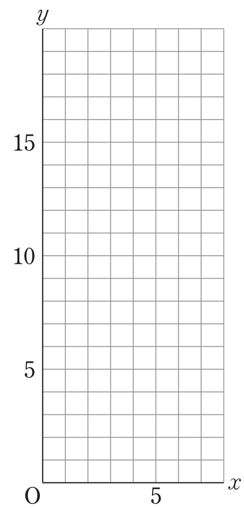
学9 AR **2**　下の図のように，台形PQRSを固定し，長方形ABCDを，矢印の方向に，点Cが点Rの位置にくるまで毎秒1cmの速さで動かす。点Cが点Qの位置にあるときからx秒後の台形PQRSと長方形ABCDの重なった部分の面積をy cm^{2}とする。次の問いに答えよ。



(1)　次の各場合について，yをxの式で表せ。

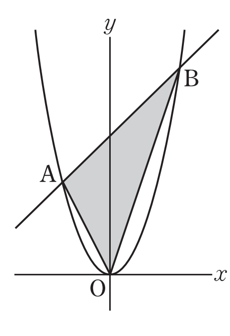
□①　$0 \leqq x \leqq 4$　　　□②　$4 \leqq x \leqq 6$

□(2)　xとyの関係をグラフに表せ。



レベル2

AR **3**　右の図で，点A，Bは関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフと直線$y=x+12$との交点である。関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフ上の点Aと点Bの間に，2点A，Bと異なる点Pをとる。次の問いに答えよ。



□(1)　点Aを通り，△OABの面積を2等分する直線の式を求めよ。

★□(2)　△PABの面積が△OABの面積と等しくなるような点Pの座標を求めよ。ただし，点Pは原点Oとは異なる点とする。

★□(3)　△PABの面積が△OABの面積の$\frac{2}{3}$になるような点Pの座標をすべて求めよ。

4章の確認

1 **関数 $y=ax^2$ の性質**　y は x の 2 乗に比例する関数で，$x=3$ のとき $y=36$ である。次の問いに答えよ。

□(1)　y を x の式で表せ。

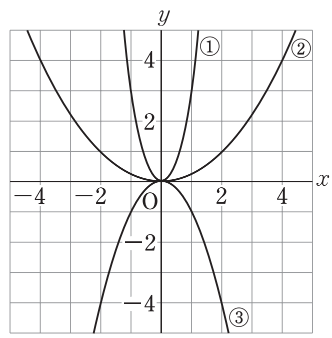
□(2)　この関数のグラフは点$(-1,\ n)$を通る。n の値を求めよ。

□(3)　x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のときの y の変域を求めよ。

□(4)　x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

□(5)　x の値が t から $t+2$ まで増加するときの変化の割合が -24 であった。t の値を求めよ。

2 **関数 $y=ax^2$ のグラフ**　右の図は，y が x の 2 乗に比例する関数のグラフである。次の問いに答えよ。

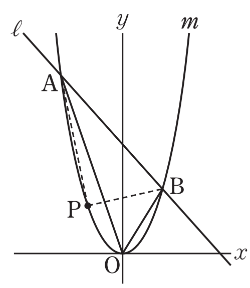


□(1)　①～③の式を求めよ。

□(2)　x 軸について，①と対称なグラフの式を求めよ。

★ □(3)　②のグラフと 1 次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+6$ のグラフの交点の座標を求めよ。

3 **関数のグラフと面積**　右の図で，直線 ℓ は関数 $y=ax+b$，放物線 m は関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ のグラフであり，2 点A，Bで交わっている。2 点A，Bの x 座標はそれぞれ -4，2 である。次の問いに答えよ。



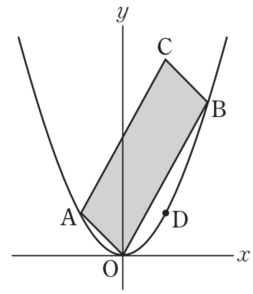
□(1)　a，b の値を求めよ。

□(2)　△AOBの面積を求めよ。

★ □(3)　放物線 m 上の点Aから点Oまでの部分にあり，△APB＝△AOB となるような点Pの座標を求めよ。

4章の応用

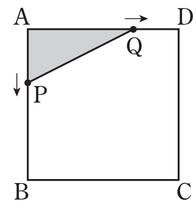
★ **1**　右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと平行四辺形AOBCがある。2点A，Bは関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり，点Aの x 座標は -2，点Bの x 座標は正で，y 座標は8である。また，点Dは y 軸について点Aと対称な点である。次の問いに答えよ。

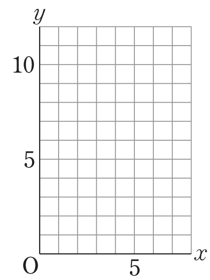


□(1)　点Dを通り，平行四辺形AOBCの面積を2等分する直線の式を求めよ。

□(2)　平行四辺形AOBCの面積を求めよ。

★ **2**　右の図は，1辺の長さが4 cmの正方形ABCDである。2点P，Qは，この辺上を動く点であり，同時に頂点Aを出発し，Pは矢印の向きに毎秒1 cmの速さで，Qは矢印の向きに毎秒2 cmの速さでそれぞれ進み，出会うまで動いた。出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm² とするとき，次の問いに答えよ。





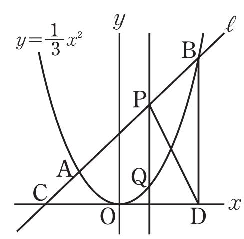
□(1)　出会うのは，出発してから何秒後か。

□(2)　点Qが辺CD上にあるときの x の変域を求めよ。また，そのときの y を x の式で表せ。

□(3)　点P，Qが出発してから出会うまでの，x と y の関係を表すグラフをかけ。

★★ **3**　右の図のように，直線 ℓ は放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ と2点A，Bで交わり，x 軸とは点Cで交わっている。点Bから x 軸に垂線をひき，交点をDとする。点Pは線分AB上を動き，点Pを通り x 軸に垂直な直線が放物線と交わる点をQとする。

2点A，Bの x 座標がそれぞれ -3，6のとき，次の問いに答えよ。



□(1)　PQ=5となるような点Pの x 座標をすべて求めよ。

□(2)　△PCDを x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積が 196π となるような点Pの x 座標を求めよ。

思考と表現　関数 $y=ax^2$

▼定義にしたがって説明する問題について学ぼう！　記述力UP

問　次の(1)，(2)で，y は x の関数か，関数でないか。その理由もふくめて答えなさい。
(1)　半径が x cm である円の面積を y cm^2 とする。
(2)　周の長さが x cm である長方形の面積を y cm^2 とする。

解　[説明]
(1)　(円の面積)＝(円周率)×(半径)^2 だから，
y を x の式で表すと，$y=\pi x^2$
x の値を決めれば，それにともなって y の値も１つに決まるから，y は x の関数である。
※π は定数だから，y は x の２乗に比例する関数である。

(2)　周の長さ(x の値)が決まっても，長方形の縦と横の長さがわからないから，面積(y の値)は求められない。
x の値を決めても，それにともなって y の値が１つに定まらないから，y は x の関数でない。

①「ともなって変わる２つの変数 x，y があって，x の値を決めるとそれに対応する y の値がただ１つに決まるとき，y は x の関数である」というのが，関数の定義。この定義に合っているかどうかで判断しよう。
※y が x の式で表せて，x に数を代入したときに y の値が１つに決まれば，y は x の関数である。

②　定義に合っていないものは関数とはいえない。必要に応じて，定義にあてはまらない具体例も書くとよい。(＋α参照)

『定義に即して説明する問題』記述のポイント
①　「●●である(**定義**)」とは，どんな条件を満たすことなのかをしっかり理解しておく。
②　なぜ「定義にあてはまる」のか，または「定義にあてはまらない」のかを筋道を立てて説明する。

プラス ＋α　例えば「縦 3 cm，横 2 cm の長方形Ａ」と「縦 4 cm，横 1 cm の長方形Ｂ」では，どちらも周の長さは 10 cm ですが，面積はＡが $3\times2=6$ cm^2，Ｂが $4\times1=4$ cm^2 で異なります。つまり，周の長さだけを決めても面積が１つに定まらないので，y は x の関数とはいえません。

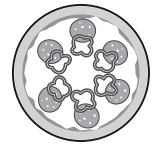
▼上の例を参考に自分で説明を書こう！　記述力UP

類題　次の(1)，(2)で，y は x の関数か，関数でないか。その理由もふくめて答えなさい。
□(1)　底面の半径が x cm である円柱の体積を y cm^3 とする。
□(2)　周の長さが x cm である正方形の面積を y cm^2 とする。

◆思考力を高める問題　思考力UP

あるピザ屋では円形のピザを販売している。そのサイズと価格は右のようになっているが，今度，Lサイズより大きい「ギガMAXピザ」という直径42cmの巨大ピザを新発売することになった。

サイズ	S	M	L
直径(cm)	18	24	30
価格(円)	800	1400	2200



ギガMAXピザの価格は何円に設定するのが妥当か考えてみよう。なお，ピザは平坦でサイズによる厚みやトッピング内容の違いはなく，大きいからといって極端な割増しや割引き価格などはないものとする。

問題文の読み方と考え方のコツ

与えられたデータをもとに，**説得力のある説明を書ける**かどうかが問われている。もちろん，直径と価格が比例しているなどと安易に考えてはいけない。仮に18cmの2倍のサイズの36cmサイズがあったとして，その価格が800円の2倍の1600円にはならないことはすぐにわかる(30cmの方が高くなってしまう)。ピザは円形であること，厚みは変わらないから直径が大きくなると面積は増えることなどに注意し，**面積と価格の関係**を考えてみよう。

▼数値を使って説得力のある答案を書こう！　思考力UP

問　ギガMAXピザの適正価格を次のように考えた。［ア］～［オ］にあてはまる式や数を答えなさい。ただし，円周率は π とし，ピザの価格は100円単位とする。

解　[説明]

ピザのサイズと面積・価格の関係は、次の表のようになる。

サイズ	S	M	L	…	ギガMAX
直径(cm)	18	24	30	…	42
面積(cm²)	81π	ア	イ	…	ウ
価格(円)	800	1400	2200	…	?

81π cm² で800円、［ア］cm² で1400円、［イ］cm² で2200円、……だから、

面積 10π cm² あたりおよそ［エ］円という価格設定になっている。

よって、面積［ウ］cm² のギガMAXピザは、［オ］円が妥当だと考えられる。

答え　［オ］円

プラス $+\alpha$　直径→半径→面積と求めることで，面積と価格を対応させると，100円未満を切り捨てる前の価格が直径(半径)の2乗に比例する関数になっていることがわかります。なお，18cm→24cm→30cm→(36cm)→(42cm)と6cmずつサイズアップするたびに「600円→800円→(1000円)→(1200円)と価格が増えるのでは？」と予想できますが，与えられたデータの数が少ないのでやや説得力に欠けます。