

④ 相似な図形とその応用

▶ チェック問題 ⇒ P121

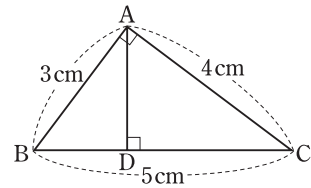
【学習1】 直角三角形・図形の折り返しと相似

問題 右の図のような、 $\angle A=90^\circ$ の直角三角形ABCがあり、
頂点Aから辺BCに垂線ADをひく。

- (1) 線分CDの長さを求めよ。
(2) 線分ADの長さを求めよ。

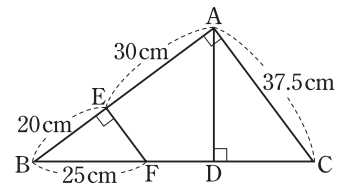
解 (1) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ だから、 $CA : CD = BC : AC$ より、
 $4 : CD = 5 : 4$, $CD = 3.2\text{ cm}$
(2) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ だから、 $BA : AD = BC : AC$ より、
 $3 : AD = 5 : 4$, $AD = 2.4\text{ cm}$

答 (1) 3.2 cm (2) 2.4 cm



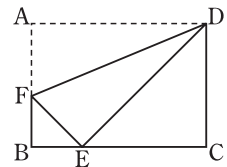
- 1** 右の図で、 $\angle BAC = \angle ADC = \angle BEF = 90^\circ$ である。次の
線分の長さを求めよ。

- (1) EF
□(2) AD
□(3) FD



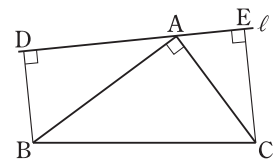
- 2** 右の図は、長方形ABCDの紙を、頂点Aが辺BC上にくるように折り返したもので、Eは頂点Aが移った点、線分DFは折り目の線である。
次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle FBE \sim \triangle ECD$ であることを証明せよ。
□(2) $AD=10\text{ cm}$, $DC=8\text{ cm}$, $CE=6\text{ cm}$ のとき、線分FEの長さを求めよ。



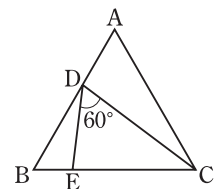
- 3** 右の図のように、 $\angle A=90^\circ$ の直角三角形ABCの頂点Aを通る直線 ℓ に、点B、Cからそれぞれ垂線BD、CEをひく。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABD \sim \triangle CAE$ であることを証明せよ。
□(2) $DB=16\text{ cm}$, $DE=40\text{ cm}$, $EC=21\text{ cm}$ のとき、線分AEの長さを求めよ。ただし、 $AE < DA$ とする。



- 4** 正三角形ABCの辺AB上に点Dをとり、DとCを結ぶ。また、辺BC上に点Eを $\angle CDE=60^\circ$ となるようにとる。次の問いに答えよ。

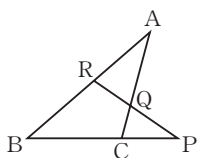
- (1) $\triangle ADC \sim \triangle BED$ であることを証明せよ。
□(2) $AC=9\text{ cm}$, $AD=3\text{ cm}$ のとき、線分ECの長さを求めよ。



★ 学習2 メネラウスの定理

下の図のように、 $\triangle ABC$ の辺BC, CA, ABまたはその延長が1つの直線とそれぞれ点P, Q, Rで交わるとき、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \text{ が成り立つ。}$$



【イメージ】



例 右の図で、

$$BC : CP = 5 : 2,$$

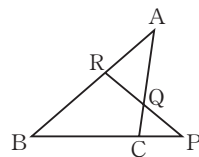
$$AR : RB = 2 : 3 \text{ のとき,}$$

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \text{ より,}$$

$$\frac{5+2}{2} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{2}{3} = 1, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{3}{7}, \quad \underline{CQ : QA = 3 : 7}$$

$$\text{また, } \frac{BC}{CP} \times \frac{PQ}{QR} \times \frac{RA}{AB} = 1 \text{ より,}$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{PQ}{QR} \times \frac{2}{2+3} = 1, \quad \frac{PQ}{QR} = 1, \quad \underline{PQ : QR = 1 : 1}$$

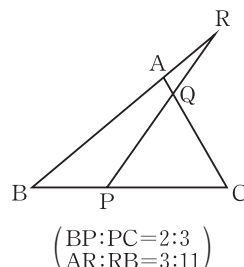
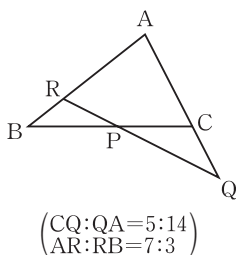
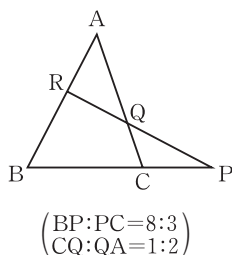


5 次の図で、それぞれの線分比を求めよ。

■(1) $AR : RB$

■(2) $BP : PC$

■(3) $CQ : QA$

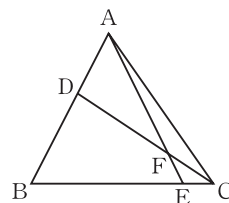


6 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AD : DB = 2 : 3$, $BE : EC = 5 : 1$ である。

線分AE, CDの交点をFとすると、次の線分比を求めよ。

□(1) $EF : FA$

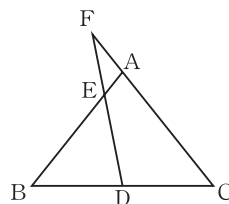
□(2) $CF : FD$



★ 7 右の図で、 $\triangle ABC$ は $AB=AC=12\text{cm}$ の二等辺三角形である。辺BCの中点をDとし、辺AB上に点Eをとり、線分DEの延長と辺CAの延長との交点をFとする。 $DE : EF = 3 : 2$ のとき、次の線分の長さを求めよ。

□(1) AF

□(2) BE

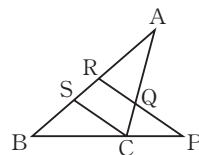


● 参考 メネラウスの定理の証明

右の図のように、 $PR \parallel CS$ となる線分CSをひくと、

$$\text{平行線と線分比の関係より, } \frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RS}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{SR}{RA}$$

$$\text{よって, } \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{RS} \times \frac{SR}{RA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

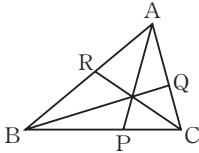


5章 相似な図形

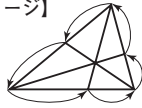
★ 学習3 チェバの定理

下の図のように、 $\triangle ABC$ の辺BC, CA, AB上にそれぞれ点P, Q, Rがあり、3直線AP, BQ, CRが1点で交わる時、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \text{ が成り立つ。}$$



【イメージ】



例 右の図で、

$$BP : PC = 5 : 2,$$

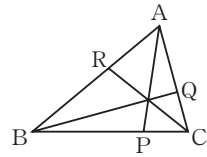
$$AR : RB = 2 : 3$$

のとき、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \text{ より、}$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{2}{3} = 1, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{3}{5},$$

$$\underline{\underline{CQ : QA = 3 : 5}}$$

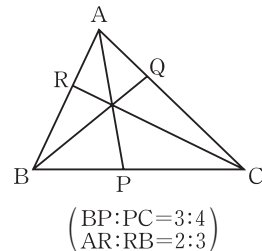
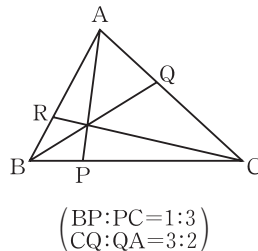
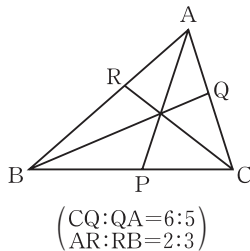


8 次の図で、それぞれの線分比を求めよ。

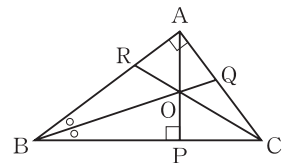
□(1) $BP : PC$

□(2) $AR : RB$

□(3) $CQ : QA$



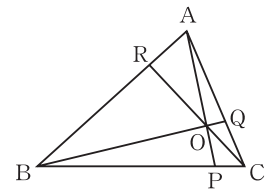
- ★ 9 右の図のように、 $\angle A = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $CA = 3\text{cm}$ の $\triangle ABC$ がある。点Aから辺BCに垂線をひき、辺BCとの交点をPとする。また、 $\angle B$ の二等分線と線分AP、辺CAとの交点をそれぞれO, Qとし、線分COの延長と辺ABとの交点をRとする。このとき、 $AR : RB$ を求めよ。



- ★ 10 右の図の $\triangle ABC$ で、点Q, Rはそれぞれ辺CA, AB上にあり、 $CQ : QA = 1 : 2$, $AR : RB = 1 : 3$ である。線分BQと線分CRとの交点をOとし、線分AOの延長と辺BCとの交点をPとする。このとき、次の線分比を求めよ。

□(1) $BP : PC$

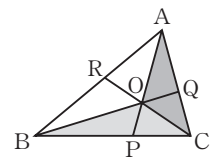
□(2) $AO : OP$



参考 チェバの定理の証明

右の図で、3直線AP, BQ, CRが1点Oで交わる時、線分比と面積比の関係より、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle AOB}{\triangle COA} \times \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \times \frac{\triangle COA}{\triangle BOC} = 1$$





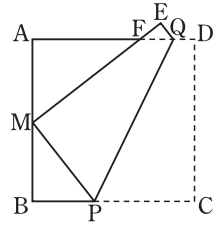
チェック問題

4 相似な図形とその応用

レベル1

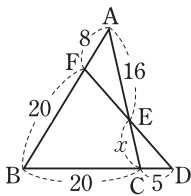
- 1** 右の図のように、1辺が8cmの正方形の紙ABCDがある。辺ABの中点Mに頂点Cが重なるように折ったときの折り目の線をPQ、頂点Dが移った点をE、線分EMと辺ADとの交点をFとする。
BP=3cmのとき、次の線分の長さを求めよ。

- (1) MF □(2) DQ

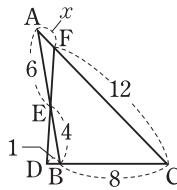


- 2** 次の図で、 x の値を求めよ。

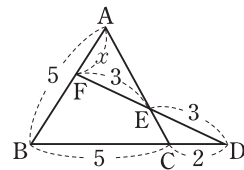
□(1)



□(2)

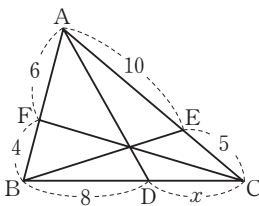


□(3)

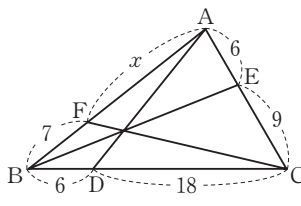


- 3** 次の図で、 x の値を求めよ。

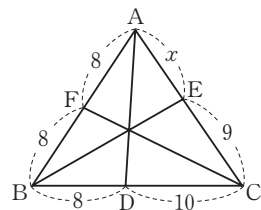
□(1)



□(2)

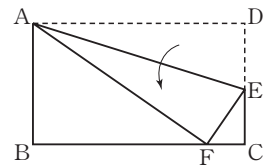


□(3)



レベル2

- ★ **4** 右の図は、長方形ABCDの紙を、頂点Dが辺BC上にくるように折り返したもので、辺BC上の点Fは、頂点Dが移った点、AEは折り目の線である。AD=15cm、DE=5cmのとき、ABの長さを求めよ。



- 5** 右の図で、点D、E、Fはそれぞれ△ABCの辺BC、CA、AB上の点で、3直線AD、BE、CFは1点Pで交わっている。

AF : FB = 3 : 2, AE : EC = 3 : 4のとき、次の比を求めよ。

□(1) BD : DC

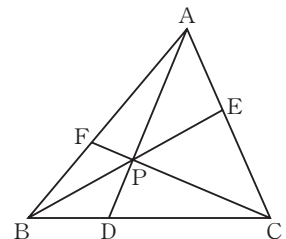
★ □(2) DP : PA

★ □(3) EP : PB

★ □(4) FP : PC

★ □(5) △APC : △ABC

★ □(6) △APF : △APE

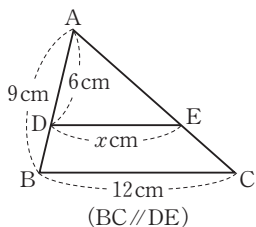


章末問題 1

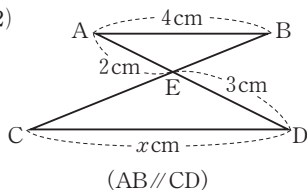
レベル1

1 次の図で、 x の値を求めよ。

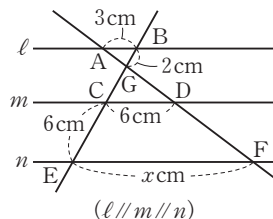
■(1)



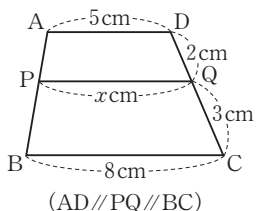
■(2)



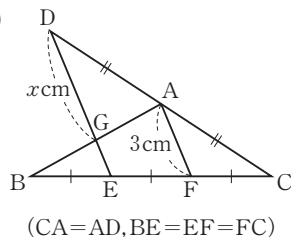
■(3)



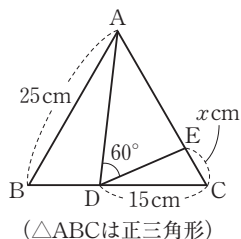
■(4)



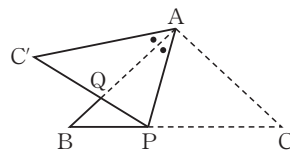
■(5)



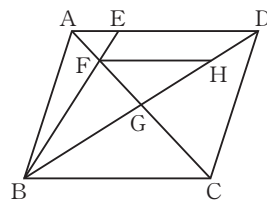
□(6)



2 右の図のように、 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC の辺 BC 上に点 P を取り、線分 AP を折り目として折り曲げる。頂点 C が移った点を C' 、線分 PC' と辺 AB との交点を Q とし、 $\angle PAB = \angle BAC'$ となるように折り曲げたとき、次の問いに答えよ。

■(1) $\triangle APB \sim \triangle PQB$ であることを証明せよ。■(2) $CA = CP$ となるとき、 $\angle ACB$ の大きさを求めよ。

3 右の図のような平行四辺形 $ABCD$ がある。対角線 AC 、 BD の交点を G とし、辺 AD 上に $AE : ED = 1 : 3$ となるような点 E をとる。また、線分 BE 、 AC の交点を F とする。対角線 BD 上に、 $FH \parallel AD$ となるような点 H をとるとき、次の問いに答えよ。

□(1) $AF : FC$ を求めよ。□(2) $FH : AD$ を求めよ。★ □(3) $\triangle EBH$ と平行四辺形 $ABCD$ の面積比を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

■(1) 図1の $\square ABCD$ で、 $BE : EC = 2 : 1$ のとき、 $\triangle BEG$ と $\triangle AFG$ の面積比を求めよ。

図1

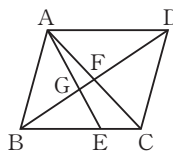
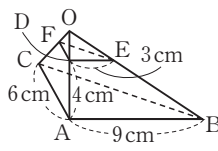
■(2) 図2の2つの三角錐 $O-ABC$ と $O-DEF$ は相似で、 $\angle OAB = \angle OAC = \angle BAC = 90^\circ$ である。点 D 、 E 、 F 、 A 、 B 、 C を頂点とする五面体の体積を求めよ。

図2

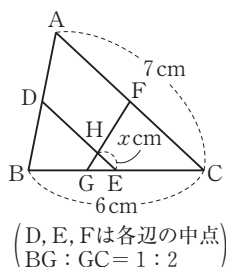


章末問題 ②

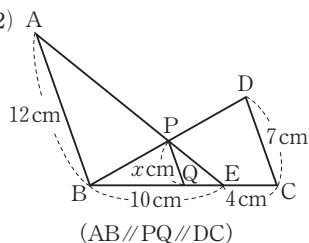
レベル2

① 次の図で、 x の値を求めよ。

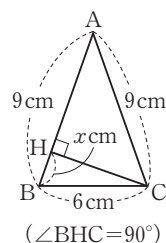
□(1)



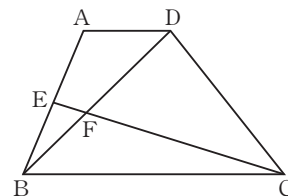
□(2)



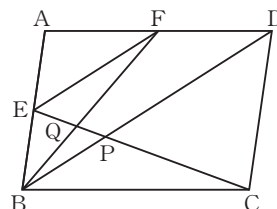
□(3)



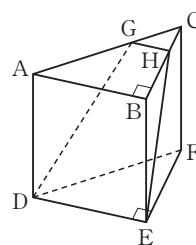
- ★ ② 右の図のような、 $AD \parallel BC$ 、 $AD:BC=1:3$ である台形ABCDがある。線分ABの中点をEとし、線分BDと線分CEとの交点をFとする。このとき、 $\triangle BEF$ と $\triangle DCF$ の面積比を求めよ。



- ★ ③ 右の図のように、平行四辺形ABCDの辺AB、ADの中点をそれぞれ、E、Fとし、対角線BDと線分CEとの交点をP、線分CEと線分BFとの交点をQとする。次の問いに答えよ。

□(1) $EQ:PQ$ を求めよ。□(2) $\triangle EFQ$ と $\triangle PDC$ の面積比を求めよ。

- ④ 右の図は、3つの長方形ADEB、BEFC、CFDAを側面とし、
□ $\angle B = \angle E = 90^\circ$ の2つの直角三角形ABC、DEFを底面とする三角柱である。また、G、Hはそれぞれ辺CA、CB上の点で、 $CA=3CG$ 、 $GH \parallel AB$ である。この三角柱を平面GDEHで切って2つの立体にする。AB=9cm、BC=6cm、AD=8cmのとき、2つの立体のうち、点Aをふくむ方の立体の体積を求めよ。

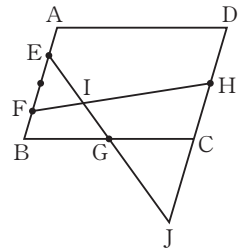




章末チャレンジ問題①

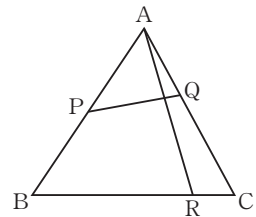
|| チャレンジ レベル1 ||

- ❶ 右の図のように、平行四辺形ABCDの辺ABを4等分する点のうち、Aにもっとも近い点をE、Bにもっとも近い点をFとし、辺BC、CDの中点をそれぞれG、Hとする。また、線分EGと線分FHとの交点をI、線分EGの延長と辺DCの延長との交点をJとする。

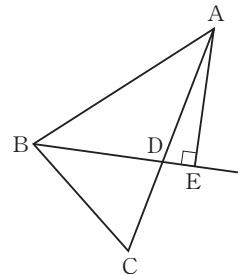


- (1) $EF : HJ$ を求めよ。
 □(2) $EI : IG$ を求めよ。
 □(3) $\triangle EFI = 24 \text{ cm}^2$ のとき、平行四辺形ABCDの面積を求めよ。

- ❷ 右の図のような $\triangle ABC$ があり、辺AB上の点P、辺AC上の点Qはそれぞれ $AP : PB = 1 : 1$ 、 $AQ : QC = 2 : 3$ を満たす。また、辺BC上に、 $\triangle APQ$ の面積と $\triangle ARC$ の面積が等しくなるような点Rをとる。次の問いに答えよ。

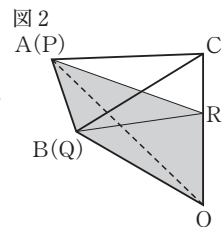
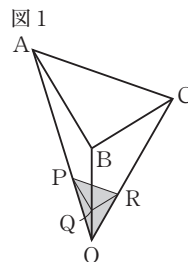


- (1) $\triangle APQ$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ。
 □(2) $BR : RC$ を求めよ。
 □(3) $\triangle RCQ$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ。
 ★ □(4) $\triangle APQ$ と $\triangle RPQ$ の面積比を求めよ。
- ★ ❸ 右の図において、 $BA = 3$ 、 $BC = 2$ 、直線BEは $\angle ABC$ の二等分線であり、 $AE \perp BE$ である。また、点Dは直線BEとACとの交点である。



- (1) $BD : DE$ を求めよ。
 □(2) $\triangle BDC$ と $\triangle AED$ の面積比を求めよ。

- ❹ 右の図1のような三角錐の形の容器O-ABCがあり、その容積は 216 cm^3 である。いま、容器O-ABCに水が 8 cm^3 入っており、その水面PQRは、容器の底面ABCに平行である。次の問いに答えよ。



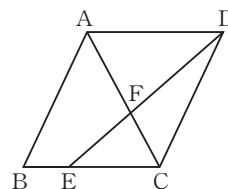
- (1) 図1で、 $OR : RC$ を求めよ。
 □(2) 図1で、 $OR : RC = 2 : 1$ となるには、あと何 cm^3 の水を加えればよいか。
 ★ □(3) 図1の状態に水を加えて水の量を全部で 200 cm^3 にした後で、図2のようにPQがちょうどABに重なるように容器を傾けた。このとき、 $OR : RC$ を求めよ。



章末チャレンジ問題②

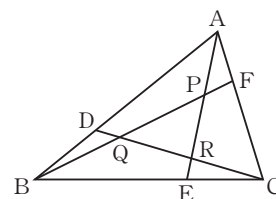
|| チャレンジ レベル2 ||

- ❶ 右の図のように、面積が 80 cm^2 の平行四辺形ABCDがある。辺BCを1:2に分ける点をE、線分DEとACとの交点をFとする。このとき、次の問いに答えよ。



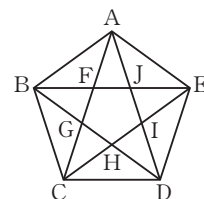
- (1) $\triangle AEF$ の面積を求めよ。
 ★ □(2) 辺AB上に点Pをとり、線分DPとACとの交点をQとする。 $\triangle DFQ$ の面積が 9 cm^2 であるとき、 $AP:PB$ を求めよ。

- ★ ❷ 右の図のように、 $\triangle ABC$ において、辺AB, BC, CAをそれぞれ2:1に分ける点をD, E, Fとし、線分AEと線分BF、線分BFと線分CD、線分CDと線分AEとの交点をそれぞれP, Q, Rとする。このとき、次の問いに答えよ。



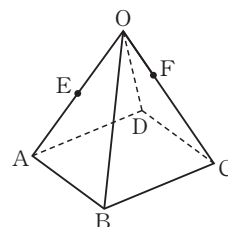
- (1) $AP:PR:RE$ を求めよ。
 □(2) $\triangle ABC$ の面積は $\triangle PQR$ の面積の何倍か。

- ❸ 右の図のように、正五角形ABCDEの対角線の交点をそれぞれF, G, H, I, Jとすると、次の問いに答えよ。



- (1) $\angle AJB$ の大きさを求めよ。
 □(2) 線分AJの長さは、線分FJの長さの何倍か。
 ★ □(3) 正五角形ABCDEの面積は、五角形FGHIJの面積の何倍か。
 ★ □(4) 星形AFBGCHDIEJの面積は、五角形FGHIJの面積の何倍か。

- ❹ 右の図のように、底面ABCDが正方形で、 $OA=OB=OC=OD$ の四角錐OABCDがある。頂点Bと、辺OAの中点E、および辺OCを1:2に分ける点Fの3点を通る平面Pによってこの四角錐を切り、2つの立体に分けるとき、次の問いに答えよ。



- ★ □(1) 頂点Oから底面ABCDへの垂線OHが平面Pと交わる点をGとするとき、 $OG:OH$ を求めよ。
 ★ □(2) 平面Pによって分けられる2つの立体のうち、頂点Oをふくむ立体の体積は、四角錐OABCDの体積の何倍か。