単元3　因数分解

教科書 P.25～33

覚えよう！

1　多項式をいくつかの**因数**(いんすう)の積の形で表すことを，その多項式を**因数分解**するという。

$\underbrace{x^2+4x+3}_{\text{単項式の和の形}}=\underbrace{(x+1)(x+3)}_{\text{因数の積の形}}$

2　**共通な因数**……$ab+ac=a(b+c)$

3　**因数分解の公式**

(1)　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(2)　$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

(3)　$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

(4)　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

AR チェック1　共通な因数

例題　**次の式を因数分解しなさい。**

(1)　$\mathbf{2x^2+4x}$

$=2x\times x+2x\times 2$ ←共通因数は $2x$

$=\mathbf{2x(x+2)}$

↑ $2x$ をくくり出す

(2)　$\mathbf{ay-4by+3cy}$

$=y\times a+y\times(-4b)+y\times 3c$ ←共通因数は y

$=\mathbf{y(a-4b+3c)}$

↑ y をくくり出す

確認問題1　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　$ab-ac$　〔　　　　〕

□(2)　$am+bm$　〔　　　　〕

□(3)　$2ac+6bc$　〔　　　　〕

□(4)　a^2b-abc　〔　　　　〕

□(5)　$3xy+5xz-2x$　〔　　　　〕

□(6)　$2ax+4bx-6x$　〔　　　　〕

AR チェック2　因数分解の公式(1)

例題　**次の式を因数分解しなさい。**

(1)　$\mathbf{x^2+9x+20}$

和が $+9$　積が $+20$

$+4$ と $+5$

$x^2+9x+20=\mathbf{(x+4)(x+5)}$

(2)　$\mathbf{x^2-5x+6}$

和が -5　積が $+6$

-2 と -3

$x^2-5x+6=\mathbf{(x-2)(x-3)}$

(3)　$\mathbf{x^2+2x-35}$

和が $+2$　積が -35

-5 と $+7$

$x^2+2x-35=\mathbf{(x-5)(x+7)}$

確認問題2　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　x^2+3x+2　〔　　　　〕

□(2)　x^2+6x+8　〔　　　　〕

□(3)　$x^2+10x+21$　〔　　　　〕

□(4)　x^2-7x+6　〔　　　　〕

□(5)　$x^2-10x+16$　〔　　　　〕

□(6)　$x^2+2x-15$　〔　　　　〕

□(7)　$x^2+4x-45$　〔　　　　〕

□(8)　$x^2-5x-14$　〔　　　　〕

□(9)　x^2-8x-9　〔　　　　〕

AR チェック3　因数分解の公式(2)

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+6x+9
$=x^2+2\times3\times x+3^2$
$=(x+3)^2$
(●＋▲)^{2}の形にする

(2) $a^2-8a+16$
$=a^2-2\times4\times a+4^2$
$=(a-4)^2$

(3) $25x^2-10x+1$
$=(5x)^2-2\times1\times5x+1^2$
$=(5x-1)^2$
$5x$を１つの文字とみる

確認問題3　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+2x+1　〔　　　〕
(2) x^2-4x+4　〔　　　〕
(3) a^2-6a+9　〔　　　〕
(4) $x^2+14x+49$　〔　　　〕
(5) $x^2-12x+36$　〔　　　〕
(6) $a^2-18a+81$　〔　　　〕
(7) $x^2+8xy+16y^2$　〔　　　〕
(8) $9a^2+6a+1$　〔　　　〕
(9) $4a^2-12a+9$　〔　　　〕

AR チェック4　因数分解の公式(3)

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-9
$=x^2-3^2$
$=(x+3)(x-3)$
(●＋▲)(●－▲)の形にする

(2) $4x^2-25y^2$
$=(2x)^2-(5y)^2$ ← $2x$＝●，$5y$＝▲と考える
$=(2x+5y)(2x-5y)$

確認問題4　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-4　〔　　　〕
(2) x^2-16　〔　　　〕
(3) a^2-49　〔　　　〕
(4) x^2-81　〔　　　〕
(5) $4a^2-9b^2$　〔　　　〕
(6) $25x^2-36y^2$　〔　　　〕

AR チェック5　いろいろな因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+3ax-10a$
$=a(x^2+3x-10)$　共通因数aをくくり出す
$=a(x-2)(x+5)$　(　)内を因数分解する

(2) $(x+2)y+(x+2)$
$x+2=M$とすると，
$(x+2)y+(x+2)$
$=My+M$
$=M(y+1)$
$=(x+2)(y+1)$　Mをもとにもどす

確認問題5　次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2+14x+24$　〔　　　〕
(2) $4ax^2-24ax+36a$　〔　　　〕
(3) $(a-b)x-(a-b)y$　〔　　　〕

単元4　式の利用

教科書 P.34～38

覚えよう！

1　計算への利用　乗法公式や因数分解を利用すると，数の計算が簡単になる場合がある。

2　式の値　そのまま数を代入しても求めることはできるが，式を簡単にしたり，因数分解したりするなど，くふうしてから代入することが大切。

3　式による証明の基本

(1)　式による証明では，条件を式に表し，それを結論にあった形に変形する。

(2)　偶数(ぐうすう)は $2n$，奇数(きすう)は $2n+1$ または $2n-1$（n は整数）

(3)　a の倍数であることの証明は，式が「$a\times$(整数)」の形で表せることを示せばよい。

チェック1　計算のくふう

例題　**次の式を，くふうして計算しなさい。**

(1)　$\mathbf{105^2-95^2}$

$=(105+95)\times(105-95)$

$=200\times10=\mathbf{2000}$

(2)　$\mathbf{101^2}$

$=(100+1)^2$

$=100^2+2\times1\times100+1^2$

$=10000+200+1=\mathbf{10201}$

(3)　$\mathbf{52\times48}$

$=(50+2)\times(50-2)$

$=50^2-2^2$

$=2500-4=\mathbf{2496}$

確認問題1　次の式を，くふうして計算しなさい。

(1)　65^2-35^2　〔　　　〕

(2)　127^2-123^2　〔　　　〕

(3)　104^2　〔　　　〕

(4)　95^2　〔　　　〕

(5)　78×82　〔　　　〕

(6)　103×97　〔　　　〕

チェック2　式の値

例題　**次の式の値を求めなさい。**

(1)　$x=6$，$y=5$ のとき，$x(x+2y)-(x-2y)(x+5y)$

(2)　$x=12$，$y=28$ のとき，$x^2+2xy+y^2$

解　(1)式を簡単にすると，

$x(x+2y)-(x-2y)(x+5y)$

$=x^2+2xy-(x^2+3xy-10y^2)=-xy+10y^2$

求める値は，$-6\times5+10\times5^2=220$

(2)$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ と因数分解し，

$x=12$，$y=28$ を代入すると，

$(12+28)^2=40^2$

$=1600$

答　(1)　220　　(2)　1600

確認問題2　次の式の値を求めなさい。

(1)　$x=16$，$y=-3$ のとき，$(x+3y)(x+4y)-(x-y)(x-2y)$

〔　　　〕

(2)　$x=43$ のとき，x^2-6x+9

〔　　　〕

(3)　$x=4.75$，$y=1.25$ のとき，x^2-y^2

〔　　　〕

チェック3　数の性質

例題　**連続する2つの奇数の積に1を加えた数は，偶数の2乗になる。このことを証明しなさい。**

解　整数nを使って連続する2つの奇数を$2n-1$，$2n+1$と表し，問題に沿って計算する。

（証明）　連続する2つの奇数は，nを整数とすると，

$2n-1$，$2n+1$

と表される。

$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2$

$=(2n)^2$

nは整数だから，$2n$は偶数である。

したがって，連続する2つの奇数の積に1を加えた数は，偶数の2乗になる。

確認問題3　「連続する2つの奇数では，大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は，8の倍数になる」ことを，次のように証明した。〔　　〕にあてはまる式を書きなさい。

（証明）　連続する2つの奇数は，nを整数とすると，小さい順に，

〔ア　　　　　　〕，$2n+1$

と表される。

$(2n+1)^2-$〔イ　　　　　　〕$=4n^2+4n+1-($〔ウ　　　　　　〕$)$

$=4n^2+4n+1-4n^2+$〔エ　　　　　　〕

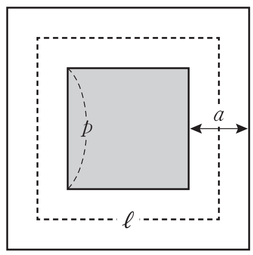
$=$〔オ　　　　　　〕

nは整数だから，$8n$は8の倍数である。

したがって，連続する2つの奇数では，大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は，8の倍数になる。

チェック4　図形の性質

例題　**1辺の長さがpの正方形の土地のまわりに，右の図のように幅aの道がついている。この道の面積をS，道の真ん中を通る線の長さをℓとすると，$S=a\ell$と表される。このことを証明しなさい。**



解　大小2つの正方形の面積，点線の正方形の1辺の長さを，pやaを使って表す。

（証明）　小さい正方形の面積はp^2，大きい正方形の面積は$(p+2a)^2$，点線で囲まれた正方形の1辺の長さは$p+a$と表される。

（道の面積）＝（大きい正方形の面積）－（小さい正方形の面積）で求められるから，道の面積Sは，

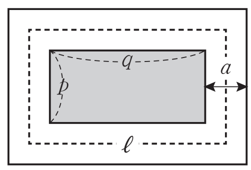
$S=(p+2a)^2-p^2=p^2+4ap+4a^2-p^2=4ap+4a^2=4a(p+a)$　①

道の真ん中を通る線の長さℓは，$\ell=4(p+a)$

したがって，$a\ell=4a(p+a)$　②

①，②から，$S=a\ell$

確認問題4　縦の長さがp，横の長さがqの長方形の土地のまわりに，右の図のように幅aの道がついている。この道の面積をS，道の真ん中を通る線の長さをℓとすると，$S=a\ell$と表されることを次のように証明した。〔　　〕にあてはまるものを答えなさい。



（証明）　（道の面積）＝（〔ア　　　　　　〕）－（小さい長方形の面積）

で求められるから，道の面積Sは，

$S=(p+2a)(q+2a)-$〔イ　　　　　　〕$=2ap+2aq+4a^2=2a(p+q+2a)$　①

道の真ん中を通る線の長さℓは，$\ell=2($〔ウ　　　　　　〕$)+2(q+a)=2p+2q+4a$

したがって，$a\ell=a($〔エ　　　　　　〕$)=2a(p+q+2a)$　②

①，②から，$S=a\ell$

練　習　問　題　その1

単元3 1

1 **共通な因数**　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　x^2-xy　〔　　〕
□(2)　$ax+3ay$　〔　　〕
□(3)　$2xyz-8yz^2$　〔　　〕
□(4)　$3ax-9bx+15cx$　〔　　〕
□(5)　$4a^2b-16ab^2+12ab$　〔　　〕
□(6)　$12x^2y-xyz-4xy^2$　〔　　〕

単元3 2

2 **因数分解の公式**　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　x^2+6x+5　〔　　〕
□(2)　x^2+9x+8　〔　　〕
□(3)　a^2-8a+7　〔　　〕
□(4)　$x^2-10x+24$　〔　　〕
□(5)　a^2-a-20　〔　　〕
□(6)　$x^2-3x-70$　〔　　〕
□(7)　$x^2+2x-48$　〔　　〕
□(8)　$a^2-6ab-16b^2$　〔　　〕
□(9)　$x^2-15xy+54y^2$　〔　　〕

単元3 3

3 **因数分解の公式**　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　x^2+4x+4　〔　　〕
□(2)　$x^2+8x+16$　〔　　〕
□(3)　$t^2+18t+81$　〔　　〕
□(4)　x^2-2x+1　〔　　〕
□(5)　$a^2-14a+49$　〔　　〕
□(6)　$x^2-12xy+36y^2$　〔　　〕
□(7)　$x^2+22x+121$　〔　　〕
□(8)　$16x^2+8x+1$　〔　　〕
□(9)　$9x^2-30x+25$　〔　　〕

単元3 4

4 **因数分解の公式**　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　x^2-36　〔　　〕
□(2)　x^2-121　〔　　〕
□(3)　$9x^2-16$　〔　　〕
□(4)　$49x^2-4$　〔　　〕
□(5)　$4x^2-9y^2$　〔　　〕
□(6)　$64x^2-25y^2$　〔　　〕

単元3 5

5 **いろいろな因数分解**　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　$3x^2-9x-12$　〔　　〕
□(2)　$4x^2+20x+24$　〔　　〕
□(3)　$3x^2-24x+48$　〔　　〕
□(4)　$2ax^2-2ax-84a$　〔　　〕
□(5)　$4x^2-16y^2$　〔　　〕
□(6)　$9a^2b-4bc^2$　〔　　〕

練　習　問　題　その2

単元4 1

1 計算のくふう　次の式をくふうして計算しなさい。

(1)　85^2-15^2　　〔　　〕

(2)　37^2-27^2　　〔　　〕

(3)　103^2　　〔　　〕

(4)　97^2　　〔　　〕

(5)　57×63　　〔　　〕

(6)　104×96　　〔　　〕

単元4 2

2 式の値　次の式の値を求めなさい。

(1)　$x=-12$，$y=3$ のとき，$x(x+6y)+(x-2y)(x-4y)$　　〔　　〕

(2)　$x=84$ のとき，$x^2+12x+36$　　〔　　〕

(3)　$x=6.5$，$y=4$ のとき，$4x^2-9y^2$　　〔　　〕

単元4 3

3 数の性質　「連続する2つの整数では，大きい方の数の2乗から2つの数の和をひいた差は，小さい方の数の2乗に等しい」ことを，次のように証明した。□にあてはまる式を書きなさい。

（証明）　連続する2つの整数は，nを整数とすると，小さい順にn，$\boxed{\text{ア}}$と表される。

$$\boxed{\text{イ}}-\{n+(\boxed{\text{ウ}})\}=\boxed{\text{エ}}-(2n+1)$$
$$=\boxed{\text{オ}}$$

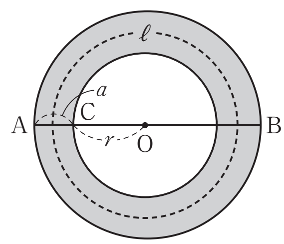
したがって，連続する2つの整数では，大きい方の数の2乗から2つの数の和をひいた差は，小さい方の数の2乗に等しい。

ア〔　　〕
イ〔　　〕
ウ〔　　〕
エ〔　　〕
オ〔　　〕

単元4 4

4 図形の性質　右の図のように，線分ABの中点をOとし，半径OAの円をかく。さらに，AC$=a$となる点CをOA上にとり，半径OCの円をかく。

OCの長さをr，点Oを中心として，ACの中点を通る円周の長さをℓ，影の部分の面積をSとすると，$S=a\ell$となることを証明しなさい。



〔　　〕

Key プラス　その1

1 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $18x^2-27xy+9x$　〔　　〕

□(2) $x^2+7x+12$　〔　　〕

□(3) $x^2-5xy-36y^2$　〔　　〕

□(4) $a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{9}$　〔　　〕

□(5) $8x^2-72$　〔　　〕

□(6) $(x+y)^2-36$　〔　　〕

□(7) $3x^2y+33xy+72y$　〔　　〕

□(8) $(2x-1)^2-(x+6)^2$　〔　　〕

□(9) $(x-y)^2-20(x-y)+100$　〔　　〕

単元4 1

2 次の式をくふうして計算しなさい。

□(1) $5.9\times357+5.9\times643$　〔　　〕

□(2) $11^2-12^2+13^2$　〔　　〕

□(3) 1004×996　〔　　〕

□(4) $93^2+2\times93\times7+7^2$　〔　　〕

単元4 2

3 次の式の値を求めなさい。

□(1) $x=32$ のとき，$(6-x)(6+x)+(x-4)(x+3)$　〔　　〕

□(2) $x=5$，$y=10$ のとき，$16x^2+24xy+9y^2$　〔　　〕

□(3) $x=17$，$y=12$ のとき，$x^2y-5xy-14y$　〔　　〕

単元4 3

4 連続する2つの偶数では，大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は，4の倍数になる。このことを証明しなさい。

〔　　〕

Key プラス　その2

1 次の式を因数分解しなさい。

(1)　$24x^2+16xy$　〔　　〕

(2)　$5x^2+10x-120$　〔　　〕

(3)　a^2b-4b　〔　　〕

(4)　$4x^2-25y^2$　〔　　〕

(5)　$\dfrac{t^2}{9}-\dfrac{1}{64}$　〔　　〕

(6)　$x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}$　〔　　〕

(7)　$x^2+6xy+9y^2$　〔　　〕

(8)　$(x+y)^2-12(x+y)+32$　〔　　〕

(9)　$(a-b)x-(b-a)$　〔　　〕

単元4 1

2 次の式をくふうして計算しなさい。

(1)　1.05^2　〔　　〕

(2)　$55^2\times3.14-45^2\times3.14$　〔　　〕

(3)　$913^2-26\times913+13^2$　〔　　〕

(4)　$25^2-24^2+23^2-21^2$　〔　　〕

3 次の問いに答えなさい。

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ となることを利用して，$x+y=4$，$xy=-2$ のときの，x^2+y^2 の値を求めなさい。

〔　　〕

(2)　$x+y=-1$，$xy=-6$ のとき，x^2+y^2 の値を求めなさい。

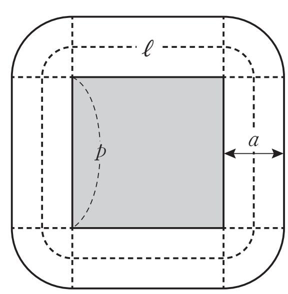
〔　　〕

(3)　$x+y=-6$，$xy=1$ のとき，$(x-y)^2$ の値を求めなさい。

〔　　〕

単元4 4

4 1辺の長さが p の正方形の土地の周囲に，右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S，道の中央を通る線の長さを ℓ とすると，$S=a\ell$ と表される。このことを証明しなさい。



〔　　〕