単元3　因数分解

教科書 P.28～36

覚えよう！

1 多項式をいくつかの因数(いんすう)の積の形に表すことを，もとの式を**因数分解**(ぶんかい)するという。

$x^2+4x+3 \underset{\text{展開}}{\overset{\text{因数分解}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+3)$

2 共通な因数……$mx+my=m(x+y)$

3 因数分解の公式

(1) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(2) $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

(3) $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

(4) $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

チェック1　共通な因数

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) $\mathbf{2x^2+4x}$

$=2x\times x+2x\times 2$ ←共通因数は $2x$

$=\mathbf{2x(x+2)}$

↑ $2x$ をくくり出す

(2) $\mathbf{ay-4by+3cy}$

$=y\times a+y\times(-4b)+y\times 3c$ ←共通因数は y

$=\mathbf{y(a-4b+3c)}$

↑ y をくくり出す

確認問題1　次の式を因数分解しなさい。

(1) $ab+ac$　〔　　〕

(2) $am+bm$　〔　　〕

(3) $2ac+6bc$　〔　　〕

(4) a^2b-abc　〔　　〕

(5) $3xy+5xz-2x$　〔　　〕

(6) $2ax+4bx-6x$　〔　　〕

チェック2　$x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) $\mathbf{x^2+9x+20}$

和が $+9$　積が $+20$

$+4$ と $+5$

$x^2+9x+20=\mathbf{(x+4)(x+5)}$

(2) $\mathbf{x^2-5x+6}$

和が -5　積が $+6$

-2 と -3

$x^2-5x+6=\mathbf{(x-2)(x-3)}$

(3) $\mathbf{x^2+2x-35}$

和が $+2$　積が -35

-5 と $+7$

$x^2+2x-35=\mathbf{(x-5)(x+7)}$

確認問題2　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+3x+2　〔　　〕

(2) x^2+6x+8　〔　　〕

(3) $x^2+10x+21$　〔　　〕

(4) x^2-7x+6　〔　　〕

(5) $x^2-10x+16$　〔　　〕

(6) $x^2+2x-15$　〔　　〕

(7) $x^2+4x-45$　〔　　〕

(8) $x^2-5x-14$　〔　　〕

(9) x^2-8x-9　〔　　〕

AR チェック3　$x^2+2ax+a^2$ や $x^2-2ax+a^2$ の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+6x+9
$=x^2+2\times3\times x+3^2$
$=(x+3)^2$
(●＋▲)^2 の形にする

(2) $a^2-8a+16$
$=a^2-2\times4\times a+4^2$
$=(a-4)^2$

(3) $25x^2-10x+1$
$=(5x)^2-2\times1\times5x+1^2$
$=(5x-1)^2$
$5x$ を1つの文字とみる

確認問題3　次の式を因数分解しなさい。

□(1) x^2+2x+1　〔　　〕
□(2) x^2-4x+4　〔　　〕
□(3) a^2-6a+9　〔　　〕
□(4) $x^2+14x+49$　〔　　〕
□(5) $x^2-12x+36$　〔　　〕
□(6) $a^2-18a+81$　〔　　〕
□(7) $x^2+8xy+16y^2$　〔　　〕
□(8) $9a^2+6a+1$　〔　　〕
□(9) $4a^2-12a+9$　〔　　〕

AR チェック4　x^2-a^2 の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-9
$=x^2-3^2$
$=(x+3)(x-3)$
(●＋▲)(●－▲)の形にする

(2) $4x^2-25y^2$
$=(2x)^2-(5y)^2$ ←$2x$＝●，$5y$＝▲と考える
$=(2x+5y)(2x-5y)$

確認問題4　次の式を因数分解しなさい。

□(1) x^2-4　〔　　〕
□(2) x^2-16　〔　　〕
□(3) a^2-49　〔　　〕
□(4) x^2-81　〔　　〕
□(5) $4a^2-9b^2$　〔　　〕
□(6) $25x^2-36y^2$　〔　　〕

AR チェック5　いろいろな式の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+3ax-10a$
$=a(x^2+3x-10)$　共通因数 a をくくり出す
$=a(x-2)(x+5)$　(　)内を因数分解する

(2) $(x+2)y+(x+2)$
$x+2=M$ とすると，
$(x+2)y+(x+2)$
$=My+M$
$=M(y+1)$
$=(x+2)(y+1)$　Mをもとにもどす

確認問題5　次の式を因数分解しなさい。

□(1) $2x^2+14x+24$　〔　　〕
□(2) $4ax^2-24ax+36a$　〔　　〕
□(3) $(a-b)x-(a-b)y$　〔　　〕

単元4　式の活用

教科書 P.37〜40

覚えよう！

1　計算の工夫　乗法の公式や因数分解の公式を使って，数の計算を簡単にすることができる。

2　式の値　直接計算しても求めることはできるが，式の展開や因数分解を活用して，簡単に答えを求めることができる。

3　式による証明の基本

(1)　式による証明では，条件を式に表し，それを結論にあった形に変形する。

(2)　偶数は $2n$，奇数は $2n+1$ または $2n-1$（n は整数）

(3)　a の倍数であることの証明は，式が「$a\times$(整数)」の形で表せることを示せばよい。

チェック１　計算の工夫

例題　**次の式を，くふうして計算しなさい。**

(1)　105^2-95^2
$=(105+95)\times(105-95)$
$=200\times10=$**2000**

(2)　101^2
$=(100+1)^2$
$=100^2+2\times1\times100+1^2$
$=10000+200+1=$**10201**

(3)　52×48
$=(50+2)\times(50-2)$
$=50^2-2^2$
$=2500-4=$**2496**

確認問題１　次の式を，くふうして計算しなさい。

(1)　65^2-35^2　〔　　　　〕

(2)　127^2-123^2　〔　　　　〕

(3)　104^2　〔　　　　〕

(4)　95^2　〔　　　　〕

(5)　78×82　〔　　　　〕

(6)　103×97　〔　　　　〕

チェック２　式の値

例題　**次の式の値を求めなさい。**

(1)　$x=6$，$y=5$ のとき，$x(x+2y)-(x-2y)(x+5y)$

(2)　$x=12$，$y=28$ のとき，$x^2+2xy+y^2$

解　(1)式を簡単にすると，
$x(x+2y)-(x-2y)(x+5y)$
$=x^2+2xy-(x^2+3xy-10y^2)=-xy+10y^2$
求める値は，$-6\times5+10\times5^2=220$

(2)$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ と因数分解し，
$x=12$，$y=28$ を代入すると，
$(12+28)^2=40^2$
$=1600$

答　(1)　220　　(2)　1600

確認問題２　次の式の値を求めなさい。

(1)　$x=16$，$y=-3$ のとき，$(x+3y)(x+4y)-(x-y)(x-2y)$　〔　　　　〕

(2)　$x=43$ のとき，x^2-6x+9　〔　　　　〕

(3)　$x=4.75$，$y=1.25$ のとき，x^2-y^2　〔　　　　〕

チェック3　式による証明

例題　**連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は，偶数の 2 乗になる。このことを証明しなさい。**

解　整数 n を使って連続する 2 つの奇数を $2n-1$，$2n+1$ と表し，問題に沿って計算する。

（証明）　n を整数とすると，連続する 2 つの奇数は，

$2n-1$，$2n+1$

と表すことができる。

それらの積に 1 を加えた数は，

$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2=(2n)^2$

n は整数だから，$2n$ は偶数である。

したがって，連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は，偶数の 2 乗になる。

確認問題３　「連続する 2 つの奇数では，大きいほうの奇数の平方から小さいほうの奇数の平方をひいた差は 8 の倍数になる」ことを，次のように証明した。〔　　〕にあてはまる式を書きなさい。

（証明）　n を整数とすると，連続する 2 つの奇数は，小さい順に

〔ア　　　　　　〕，$2n+1$

と表すことができる。

大きいほうの奇数の平方から小さいほうの奇数の平方をひいた差は

$(2n+1)^2-$〔イ　　　　　　〕$=4n^2+4n+1-($〔ウ　　　　　　〕$)$

$=4n^2+4n+1-4n^2+$〔エ　　　　　　〕

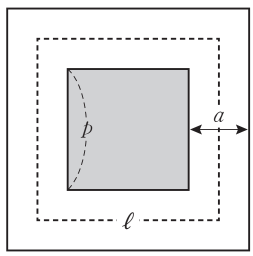
$=$〔オ　　　　　　〕

n は整数だから，$8n$ は 8 の倍数である。

したがって，連続する 2 つの奇数では，大きいほうの奇数の平方から小さいほうの奇数の平方をひいた差は 8 の倍数になる。

チェック4　図形の性質の証明

例題　**1 辺の長さが p の正方形の土地のまわりに，右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S，道の真ん中を通る線の長さを ℓ とすると，$S=a\ell$ と表される。このことを証明しなさい。**



解　小さい正方形の面積，大きい正方形の面積，図の点線で囲まれた正方形の 1 辺の長さを，それぞれ p や a を使って表す。

（証明）　小さい正方形の面積は p^2，大きい正方形の面積は $(p+2a)^2$，点線で囲まれた正方形の 1 辺の長さは $p+a$ と表される。

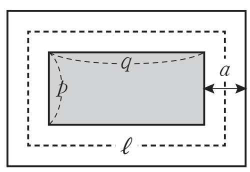
（道の面積）＝（大きい正方形の面積）－（小さい正方形の面積）で求められるから，

$S=(p+2a)^2-p^2=p^2+4ap+4a^2-p^2=4ap+4a^2$　…①

また，$\ell=4(p+a)$ だから，$a\ell=a\times4(p+a)=4ap+4a^2$　…②

①，②から，$S=a\ell$

確認問題４　縦の長さが p，横の長さが q の長方形の土地のまわりに，右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S，道の真ん中を通る線の長さを ℓ とすると，$S=a\ell$ と表されることを次のように証明した。〔　　〕にあてはまるものを答えなさい。



（証明）　（道の面積）＝（〔ア　　　　　　〕）－（小さい長方形の面積）

だから，$S=(p+2a)(q+2a)-$〔イ　　　　　　〕$=2ap+2aq+4a^2$　…①

また，$\ell=2($〔ウ　　　　　　〕$)+2(q+a)=2p+2q+4a$ だから，

$a\ell=a($〔エ　　　　　　〕$)=2ap+2aq+4a^2$　…②

①，②から　$S=a\ell$

練　習　問　題　その1

単元3 1

1 共通な因数　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-xy　　(2) $ax+3ay$　　(3) $2xyz-8yz^2$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(4) $3ax-9bx+15cx$　　(5) $4a^2b-16ab^2+12ab$　　(6) $12x^2y-xyz-4xy^2$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

単元3 2

2 $x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+6x+5　　(2) x^2+9x+8　　(3) a^2-8a+7

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(4) $x^2-10x+24$　　(5) a^2-a-20　　(6) $x^2-3x-70$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(7) $x^2+2x-48$　　(8) $a^2-6ab-16b^2$　　(9) $x^2-15xy+54y^2$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

単元3 3

3 $x^2+2ax+a^2$ や $x^2-2ax+a^2$ の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+4x+4　　(2) $x^2+8x+16$　　(3) $t^2+18t+81$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(4) x^2-2x+1　　(5) $a^2-14a+49$　　(6) $x^2-12xy+36y^2$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(7) $x^2+22x+121$　　(8) $16x^2+8x+1$　　(9) $9x^2-30x+25$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

単元3 4

4 x^2-a^2 の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-36　　(2) x^2-121　　(3) $9x^2-16$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(4) $49x^2-4$　　(5) $4x^2-9y^2$　　(6) $64x^2-25y^2$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

単元3 5

5 いろいろな式の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x^2-9x-12$　　(2) $4x^2+20x+24$　　(3) $3x^2-24x+48$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

(4) $2ax^2-2ax-84a$　　(5) $4x^2-16y^2$　　(6) $9a^2b-4bc^2$

〔　　〕　〔　　〕　〔　　〕

練　習　問　題　その2

単元4 1

1 計算の工夫　次の式を，工夫して計算しなさい。

(1)　85^2-15^2　　〔　　　　〕
(2)　37^2-27^2　　〔　　　　〕
(3)　103^2　　〔　　　　〕

(4)　97^2　　〔　　　　〕
(5)　57×63　　〔　　　　〕
(6)　104×96　　〔　　　　〕

単元4 2

2 式の値　次の式の値を求めなさい。

(1)　$x=-12$，$y=3$ のとき，$x(x+6y)+(x-2y)(x-4y)$

〔　　　　〕

(2)　$x=84$ のとき，$x^2+12x+36$

〔　　　　〕

(3)　$x=6.5$，$y=4$ のとき，$4x^2-9y^2$

〔　　　　〕

単元4 3

3 式による証明　「連続する2つの整数では，大きいほうの整数の平方から2つの整数の和をひいた差は，小さいほうの整数の平方に等しい」ことを，次のように証明した。□にあてはまる式を書きなさい。

（証明）　n を整数とすると，連続する2つの整数は，小さい順に n，［ア］と表すことができる。
大きいほうの整数の平方から2つの整数の和をひいた差は，

［イ］$-\{n+($［ウ］$)\}=$［エ］$-(2n+1)$

$=$［オ］

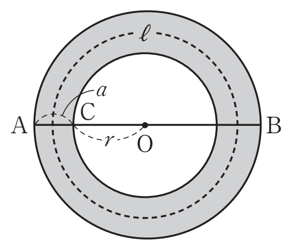
したがって，2つの続いた整数では，大きいほうの整数の平方から2つの整数の和をひいた差は，小さいほうの整数の平方に等しい。

ア〔　　　　〕
イ〔　　　　〕
ウ〔　　　　〕
エ〔　　　　〕
オ〔　　　　〕

単元4 4

4 図形の性質の証明　右の図のように，線分ABの中点をOとし，半径OAの円をかく。さらに，AC$=a$ となる点CをOA上にとり，半径OCの円をかく。

OCの長さを r，点Oを中心として，ACの中点を通る円の周の長さを ℓ，影の部分の面積を S とすると，$S=a\ell$ となることを証明しなさい。



〔　　　　〕

Keyプラス その1

1 次の式を因数分解しなさい。

□(1)　$18x^2-27xy+9x$　〔　　〕

□(2)　$x^2+7x+12$　〔　　〕

□(3)　$x^2-5xy-36y^2$　〔　　〕

□(4)　$a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{9}$　〔　　〕

□(5)　$8x^2-72$　〔　　〕

□(6)　$(x+y)^2-36$　〔　　〕

□(7)　$3x^2y+33xy+72y$　〔　　〕

□(8)　$(2x-1)^2-(x+6)^2$　〔　　〕

□(9)　$(x-y)^2-20(x-y)+100$　〔　　〕

単元4 1

2 次の式を，工夫して計算しなさい。

□(1)　$5.9\times357+5.9\times643$　〔　　〕

□(2)　$11^2-12^2+13^2$　〔　　〕

□(3)　1004×996　〔　　〕

□(4)　$93^2+2\times93\times7+7^2$　〔　　〕

単元4 2

3 次の式の値を求めなさい。

□(1)　$x=32$ のとき，$(6-x)(6+x)+(x-4)(x+3)$　〔　　〕

□(2)　$x=5$，$y=10$ のとき，$16x^2+24xy+9y^2$　〔　　〕

□(3)　$x=17$，$y=12$ のとき，$x^2y-5xy-14y$　〔　　〕

単元4 3

4 連続する2つの偶数では，大きいほうの偶数の2乗から小さいほうの偶数の2乗をひいた差は4の倍数になる。このことを証明しなさい。

□

〔　　〕

Keyプラス　その2

1 次の式を因数分解しなさい。

(1) $24x^2+16xy$　〔　　〕

(2) $5x^2+10x-120$　〔　　〕

(3) a^2b-4b　〔　　〕

(4) $4x^2-25y^2$　〔　　〕

(5) $\frac{t^2}{9}-\frac{1}{64}$　〔　　〕

(6) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$　〔　　〕

(7) $x^2+6xy+9y^2$　〔　　〕

(8) $(x+y)^2-12(x+y)+32$　〔　　〕

(9) $(a-b)x-(b-a)$　〔　　〕

単元4 1

2 次の式を，工夫して計算しなさい。

(1) 1.05^2　〔　　〕

(2) $55^2\times3.14-45^2\times3.14$　〔　　〕

(3) $913^2-26\times913+13^2$　〔　　〕

(4) $25^2-24^2+23^2-21^2$　〔　　〕

3 次の問いに答えなさい。

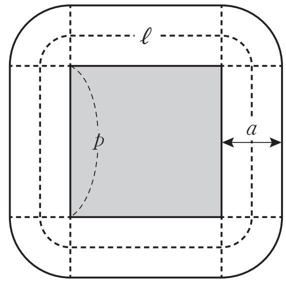
(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ となることを利用して，$x+y=4$，$xy=-2$ のときの，x^2+y^2 の値を求めなさい。　〔　　〕

(2) $x+y=-1$，$xy=-6$ のとき，x^2+y^2 の値を求めなさい。　〔　　〕

(3) $x+y=-6$，$xy=1$ のとき，$(x-y)^2$ の値を求めなさい。　〔　　〕

単元4 4

4 1辺の長さが p の正方形の土地のまわりに，右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S，道の真ん中を通る線の長さを ℓ とすると，$S=a\ell$ と表される。このことを証明しなさい。



〔　　〕