

単元

3

因数分解(1)

教科書

P.25~32

覚えよう!

1 1つの多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを、もとの多項式を因数分解するという。

$$x^2+4x+3 \xleftarrow{\text{因数分解}} (x+1)(x+3) \xrightarrow{\text{展開}}$$

2 共通な因数…… $ma+mb=m(a+b)$

3 因数分解の公式

- (1) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
- (2) $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
- (3) $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
- (4) $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

チェック1 共通因数

例題 次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2+4x$
 $=2x \times x + 2x \times 2$ ← 共通因数は $2x$
 $=2x(x+2)$
 ↑
 $2x$ をくくり出す

(2) $ay-4by+3cy$
 $=y \times a + y \times (-4b) + y \times 3c$ ← 共通因数は y
 $=y(a-4b+3c)$
 ↑
 y をくくり出す

確認問題1 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> (1) $ab+ac$ | <input type="checkbox"/> (2) $am-bm$ | <input type="checkbox"/> (3) $2ac+6bc$ |
| { | { | { |
| <input type="checkbox"/> (4) a^2b-abc | <input type="checkbox"/> (5) $3xy+5xz-2x$ | <input type="checkbox"/> (6) $2ax+4bx-6x$ |
| } | } | } |

チェック2 因数分解の公式(1)

例題 次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+9x+20$
 和が +9 積が +20
 +4 と +5
 $x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

(2) x^2-5x+6
 和が -5 積が +6
 -2 と -3
 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

(3) $x^2+2x-35$
 和が +2 積が -35
 -5 と +7
 $x^2+2x-35=(x-5)(x+7)$

確認問題2 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> (1) x^2+3x+2 | <input type="checkbox"/> (2) x^2+6x+8 | <input type="checkbox"/> (3) $x^2+10x+21$ |
| { | { | { |
| <input type="checkbox"/> (4) x^2-7x+6 | <input type="checkbox"/> (5) $x^2-10x+16$ | <input type="checkbox"/> (6) $x^2+2x-15$ |
| } | } | } |
| <input type="checkbox"/> (7) $x^2+4x-45$ | <input type="checkbox"/> (8) $x^2-5x-14$ | <input type="checkbox"/> (9) x^2-8x-9 |
| } | } | } |



チェック3 因数分解の公式(2)

例題 次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+6x+9
 $=x^2+2\times 3\times x+3^2$
 $=\mathbf{(x+3)^2}$
 ↑
 (●+▲)²の形にする

(2) $a^2-8a+16$
 $=a^2-2\times 4\times a+4^2$
 $=\mathbf{(a-4)^2}$

(3) $25x^2-10x+1$
 $=\mathbf{(5x)^2-2\times 1\times 5x+1^2}$
 $=\mathbf{(5x-1)^2}$
 ← 5xを1つの文字とみる

確認問題3 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|----------------------|-------------------|-------------------|
| ■(1) x^2+2x+1 | ■(2) x^2-4x+4 | □(3) a^2-6a+9 |
| { | { | { |
| □(4) $x^2+14x+49$ | ■(5) $x^2-12x+36$ | □(6) $a^2-18a+81$ |
| { | { | { |
| ■(7) $x^2+8xy+16y^2$ | □(8) $9a^2+6a+1$ | ■(9) $4a^2-12a+9$ |
| { | { | { |



チェック4 因数分解の公式(3)

例題 次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-9
 $=x^2-3^2$
 $=\mathbf{(x+3)(x-3)}$
 ↑
 (●+▲)(●-▲)の形にする

(2) $4x^2-25y^2$
 $=\mathbf{(2x)^2-(5y)^2}$ ← $2x=●, 5y=▲$ と考える
 $=\mathbf{(2x+5y)(2x-5y)}$

確認問題4 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|---------------|------------------|--------------------|
| ■(1) x^2-4 | □(2) x^2-16 | ■(3) a^2-49 |
| { | { | { |
| □(4) x^2-81 | ■(5) $4a^2-9b^2$ | ■(6) $25x^2-36y^2$ |
| { | { | { |



チェック5 いろいろな因数分解

例題 次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+3ax-10a$
 $=a(x^2+3x-10)$
 $=\mathbf{a(x-2)(x+5)}$
 ← 共通因数 a をくくり出す
 ← () 内を因数分解する

(2) $(x+2)y+(x+2)$
 $x+2=M$ とすると,
 $(x+2)y+(x+2)$
 $=My+M$
 $=M(y+1)$
 $=\mathbf{(x+2)(y+1)}$ ← Mをもとにもどす

確認問題5 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|--------------------|-----------------------|----------------------|
| ■(1) $2x^2+14x+24$ | □(2) $4ax^2-24ax+36a$ | ■(3) $(a-b)x-(a-b)y$ |
| { | { | { |

単元
4 **因数分解(2) / 文字式の活用** 教科書
P.32~36

覚えよう!

1 計算への利用 式の展開や因数分解の公式を利用すると、計算が簡単になる場合がある。

2 式の値 そのまま数を代入しても求めることができるが、式を簡単にしたり、因数分解したりするなど、くふうしてから代入することが大切。

3 式による証明の基本

- (1) 式による証明では、条件を式に表し、それを結論にあった形に変形する。
- (2) 偶数は $2 \times (\text{整数})$ 、奇数は $2 \times (\text{整数}) + 1$ または $2 \times (\text{整数}) - 1$
- (3) a の倍数であることの証明は、式が「 $a \times (\text{整数})$ 」の形で表せることを示せばよい。

チェック1 計算への利用

例題 次の式を、くふうして計算しなさい。

(1) $105^2 - 95^2$

$$= (105 + 95) \times (105 - 95)$$

$$= 200 \times 10 = \mathbf{2000}$$

(2) 101^2

$$= (100 + 1)^2$$

$$= 100^2 + 2 \times 1 \times 100 + 1^2$$

$$= 10000 + 200 + 1 = \mathbf{10201}$$

(3) 52×48

$$= (50 + 2) \times (50 - 2)$$

$$= 50^2 - 2^2$$

$$= 2500 - 4 = \mathbf{2496}$$

確認問題1 次の式を、くふうして計算しなさい。

(1) $65^2 - 35^2$

(2) $127^2 - 123^2$

(3) 104^2

[]

[]

[]

(4) 95^2

(5) 78×82

(6) 103×97

[]

[]

[]

チェック2 式の値

例題 次の式の値を求めなさい。

(1) $x=6, y=5$ のとき, $x(x+2y) - (x-2y)(x+5y)$

(2) $x=12, y=28$ のとき, $x^2 + 2xy + y^2$

解 (1)式を簡単にすると,

$$x(x+2y) - (x-2y)(x+5y)$$

$$= x^2 + 2xy - (x^2 + 3xy - 10y^2) = -xy + 10y^2$$

求める値は, $-6 \times 5 + 10 \times 5^2 = 220$

(2) $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ と因数分解し,

$x=12, y=28$ を代入すると,

$$(12+28)^2 = 40^2$$

$$= 1600$$

答 (1) 220 (2) 1600

確認問題2 次の式の値を求めなさい。

(1) $x=16, y=-3$ のとき, $(x+3y)(x+4y) - (x-y)(x-2y)$

[]

(2) $x=43$ のとき, $x^2 - 6x + 9$

[]

(3) $x=4.75, y=1.25$ のとき, $x^2 - y^2$

[]



チェック3 数の性質の証明

例題 連続する2つの奇数の積に1を加えた数は、偶数の2乗になる。このことを証明しなさい。

解 整数 n を使って連続する2つの奇数を $2n-1, 2n+1$ と表し、問題に沿って計算する。

(証明) n を整数とすると、連続する2つの奇数は、

$$2n-1, 2n+1$$

と表される。

それらの積に1を加えた数は、

$$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2=(2n)^2$$

n は整数だから、 $2n$ は偶数である。

したがって、連続する2つの奇数の積に1を加えた数は、偶数の2乗になる。

確認問題3 「連続する2つの奇数では、大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は8の倍数になる」ことを、次のように証明した。[]にあてはまる式を書きなさい。

(証明) n を整数とすると、連続する2つの奇数は、小さい順に[ア], $2n+1$ と表される。

大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は

$$\begin{aligned} (2n+1)^2 - [\text{イ} \quad \quad \quad] &= 4n^2 + 4n + 1 - ([\text{ウ} \quad \quad \quad]) \\ &= 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + [\text{エ} \quad \quad \quad] \\ &= [\text{オ} \quad \quad \quad] \end{aligned}$$

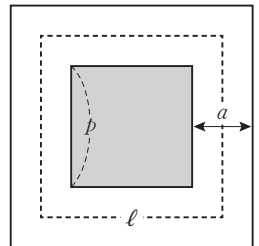
n は整数だから、[カ] は8の倍数である。

したがって、連続する2つの奇数では、大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は8の倍数になる。



チェック4 図形の性質の証明

例題 1辺の長さが p の正方形の土地のまわりに、右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S 、道の真ん中を通る線の長さを ℓ とすると、 $S=a\ell$ と表される。このことを証明しなさい。



解 小さい正方形の面積、大きい正方形の面積、図の点線で囲まれた正方形の1辺の長さを、それぞれ p や a を使って表す。

(証明) 小さい正方形の面積は p^2 、大きい正方形の面積は $(p+2a)^2$ 、点線で囲まれた正方形の1辺の長さは $p+a$ と表される。

(道の面積) = (大きい正方形の面積) - (小さい正方形の面積) で求められるから

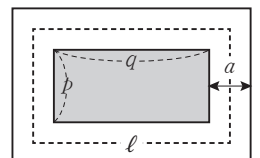
$$S = (p+2a)^2 - p^2 = p^2 + 4ap + 4a^2 - p^2 = 4ap + 4a^2 \quad \dots\dots ①$$

また $\ell = 4(p+a)$

$$\text{よって } a\ell = a \times 4(p+a) = 4ap + 4a^2 \quad \dots\dots ②$$

①, ②より $S=a\ell$

確認問題4 縦の長さが p 、横の長さが q の長方形の土地のまわりに、右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S 、道の真ん中を通る線の長さを ℓ とすると、 $S=a\ell$ と表されることを次のように証明した。[]にあてはまるものを答えなさい。



(証明) (道の面積) = ([ア]) - (小さい長方形の面積)

$$\text{で求められるから } S = (p+2a)(q+2a) - [\text{イ} \quad \quad \quad] = 2ap + 2aq + 4a^2 \quad \dots\dots ①$$

また $\ell = 2([\text{ウ} \quad \quad \quad]) + 2(q+a) = 2p + 2q + 4a$

$$\text{よって } a\ell = a([\text{エ} \quad \quad \quad]) = 2ap + 2aq + 4a^2 \quad \dots\dots ②$$

①, ②より $S=a\ell$

練習問題

その1

単元3
1

1 共通因数 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> (1) $x^2 - xy$ | <input type="checkbox"/> (2) $ax + 3ay$ | <input type="checkbox"/> (3) $2xyz - 8yz^2$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (4) $3ax - 9bx + 15cx$ | <input type="checkbox"/> (5) $4a^2b - 16ab^2 + 12ab$ | <input type="checkbox"/> (6) $12x^2y - xyz - 4xy^2$ |
| [] | [] | [] |

単元3
2

2 因数分解の公式 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> (1) $x^2 + 6x + 5$ | <input type="checkbox"/> (2) $x^2 + 9x + 8$ | <input type="checkbox"/> (3) $a^2 - 8a + 7$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (4) $x^2 - 10x + 24$ | <input type="checkbox"/> (5) $a^2 - a - 20$ | <input type="checkbox"/> (6) $x^2 - 3x - 70$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (7) $x^2 + 2x - 48$ | <input type="checkbox"/> (8) $a^2 - 6ab - 16b^2$ | <input type="checkbox"/> (9) $x^2 - 15xy + 54y^2$ |
| [] | [] | [] |

単元3
3

3 因数分解の公式 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> (1) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="checkbox"/> (2) $x^2 + 8x + 16$ | <input type="checkbox"/> (3) $t^2 + 18t + 81$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (4) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="checkbox"/> (5) $a^2 - 14a + 49$ | <input type="checkbox"/> (6) $x^2 - 12xy + 36y^2$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (7) $x^2 + 22x + 121$ | <input type="checkbox"/> (8) $16x^2 + 8x + 1$ | <input type="checkbox"/> (9) $9x^2 - 30x + 25$ |
| [] | [] | [] |

単元3
4

4 因数分解の公式 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> (1) $x^2 - 36$ | <input type="checkbox"/> (2) $x^2 - 121$ | <input type="checkbox"/> (3) $9x^2 - 16$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (4) $49x^2 - 4$ | <input type="checkbox"/> (5) $4x^2 - 9y^2$ | <input type="checkbox"/> (6) $64x^2 - 25y^2$ |
| [] | [] | [] |

単元3
5

5 いろいろな因数分解 次の式を因数分解しなさい。

- | | | |
|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> (1) $3x^2 - 9x - 12$ | <input type="checkbox"/> (2) $4x^2 + 20x + 24$ | <input type="checkbox"/> (3) $3x^2 - 24x + 48$ |
| [] | [] | [] |
| <input type="checkbox"/> (4) $2ax^2 - 2ax - 84a$ | <input type="checkbox"/> (5) $4x^2 - 16y^2$ | <input type="checkbox"/> (6) $9a^2b - 4bc^2$ |
| [] | [] | [] |

練習問題 その2

単元4
①

1 計算への利用 くふうして、次の式を計算しなさい。

- (1) $85^2 - 15^2$ (2) $37^2 - 27^2$ (3) 103^2
 [] [] []
 (4) 97^2 (5) 57×63 (6) 104×96
 [] [] []

単元4
②

2 式の値 次の式の値を求めなさい。

- (1) $x = -12, y = 3$ のとき, $x(x+6y) + (x-2y)(x-4y)$
 []
 (2) $x = 84$ のとき, $x^2 + 12x + 36$
 []
 (3) $x = 6.5, y = 4$ のとき, $4x^2 - 9y^2$
 []

単元4
③

3 数の性質の証明 「連続する2つの整数では、大きい方の整数の平方から2つの整数の和をひいた差は、小さい方の整数の平方に等しい」ことを、次のように証明した。にあてはまる式を書きなさい。

(証明) n を整数とすると、連続する2つの整数は、小さい順に $n, \text{ア}$ と表される。

大きい方の整数の平方から2つの整数の和をひいた差は、

$$\text{イ} - \{n + (\text{ウ})\} = \text{エ} - (2n + 1)$$

$$= \text{オ}$$

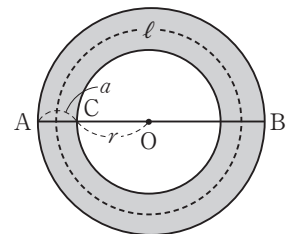
したがって、連続する2つの整数では、大きい方の整数の平方から2つの整数の和をひいた差は、小さい方の整数の平方に等しい。

- ア []
 イ []
 ウ []
 エ []
 オ []

単元4
④

4 図形の性質の証明 右の図のように、線分 AB の中点を O とし、半径 OA の円を かく。さらに、 $AC = a$ となる点 C を OA 上にとり、半径 OC の円をかく。


OC の長さを r 、点 O を中心として、 AC の中点を通る円の周の長さを ℓ 、影の部分の面積を S とすると、 $S = a\ell$ となることを証明しなさい。



[]

Key プラス

その1

 1 次の式を因数分解しなさい。

(1) $18x^2 - 27xy + 9x$

(2) $x^2 + 7x + 12$

(3) $x^2 - 5xy - 36y^2$

[] [] []

(4) $a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{9}$

(5) $8x^2 - 72$

(6) $(x+y)^2 - 36$


[] [] []

(7) $3x^2y + 33xy + 72y$

(8) $(2x-1)^2 - (x+6)^2$

(9) $(x-y)^2 - 20(x-y) + 100$

[] [] []

 単元4 1 2 **2** くふうして、次の式を計算しなさい。

(1) $5.9 \times 357 + 5.9 \times 643$

(2) $11^2 - 12^2 + 13^2$

[] [] []

(3) 1004×996

(4) $93^2 + 2 \times 93 \times 7 + 7^2$

[] [] []

 単元4 2 **3** 次の式の値を求めなさい。

(1) $x=32$ のとき、 $(6-x)(6+x) + (x-4)(x+3)$


[] [] []

(2) $x=5, y=10$ のとき、 $16x^2 + 24xy + 9y^2$

[] [] []

(3) $x=17, y=12$ のとき、 $x^2y - 5xy - 14y$

[] [] []

 単元4 3 **4** 連続する2つの偶数では、大きい方の偶数の2乗から小さい方の偶数の2乗をひいた差は4の倍数になる。

このことを証明しなさい。

Key プラス その2

1 a, b を自然数とすると、 $x^2 + \square x + 18$ を $(x+a)(x+b)$ の形に因数分解できるように \square に自然数を入れる。
 \square にあてはまる自然数をすべて答えなさい。

2 次の式を因数分解しなさい。

■(1) $24x^2 + 16xy$

■(2) $5x^2 + 10x - 120$

■(3) $a^2b - 4b$

[]

[]

[]

■(4) $4x^2 - 25y^2$

□(5) $\frac{t^2}{9} - \frac{1}{64}$

■(6) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

[]

[]

[]

■(7) $x^2 + 6xy + 9y^2$

□(8) $(x+y)^2 - 12(x+y) + 32$

□(9) $(a-b)x - (b-a)$

3 くふうして、次の式を計算しなさい。

■(1) 1.05^2

□(2) $55^2 \times 3.14 - 45^2 \times 3.14$

[]

[]

[]

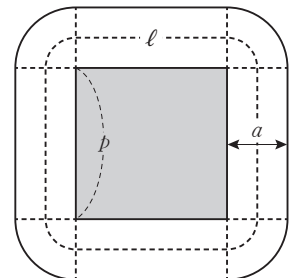
□(3) $913^2 - 26 \times 913 + 13^2$

□(4) $25^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2$

[]

[]

4 1 辺の長さが p の正方形の土地のまわりに、右の図のように幅 a の道がついてい
 る。この道の面積を S 、道の真ん中を通る線の長さを l とすると、 $S=al$ と表され
 る。このことを証明しなさい。



[]