単元3　因数分解

教科書 P.26～33

覚えよう！

1　1つの式が単項式や多項式の積の形に表されるとき，積をつくっている各式を，もとの式の**因数**(いんすう)という。

2　多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを，もとの式を**因数分解**するという。

$x^2+4x+3=\underbrace{(x+1)}_{\text{因数}}\underbrace{(x+3)}_{\text{因数}}$

3　因数分解の公式

(1)　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(2)　$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

(3)　$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

(4)　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

チェック1　共通な因数

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$\boldsymbol{2x^2+4x}$

$=2x\times x+2x\times 2$ ←共通因数は $2x$

$=\boldsymbol{2x(x+2)}$

↑ $2x$ をくくり出す

(2)　$\boldsymbol{ay-4by+3cy}$

$=y\times a+y\times(-4b)+y\times 3c$ ←共通因数は y

$=\boldsymbol{y(a-4b+3c)}$

↑ y をくくり出す

確認問題1　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　$ab+ac$

〔　　　　〕

□(2)　$am+bm$

〔　　　　〕

□(3)　x^2+2xy

〔　　　　〕

□(4)　$6ab-3a$

〔　　　　〕

□(5)　$2ac+6bc$

〔　　　　〕

□(6)　a^2b-abc

〔　　　　〕

□(7)　$3xy+5xz-2x$

〔　　　　〕

□(8)　$2ax+4bx-6x$

〔　　　　〕

□(9)　$5x^2y-8xy^2+3xy$

〔　　　　〕

チェック2　$x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$\boldsymbol{x^2+9x+20}$

和が $+9$　積が $+20$

$+4$ と $+5$

$x^2+9x+20=\boldsymbol{(x+4)(x+5)}$

(2)　$\boldsymbol{x^2-5x+6}$

和が -5　積が $+6$

-2 と -3

$x^2-5x+6=\boldsymbol{(x-2)(x-3)}$

(3)　$\boldsymbol{x^2+2x-35}$

和が $+2$　積が -35

-5 と $+7$

$x^2+2x-35=\boldsymbol{(x-5)(x+7)}$

確認問題2　次の式を因数分解しなさい。

□(1)　x^2+3x+2

〔　　　　〕

□(2)　$x^2+7x+10$

〔　　　　〕

□(3)　x^2+6x+8

〔　　　　〕

□(4)　x^2-7x+6

〔　　　　〕

□(5)　$x^2-10x+16$

〔　　　　〕

□(6)　$x^2+2x-15$

〔　　　　〕

□(7)　$x^2+4x-45$

〔　　　　〕

□(8)　$x^2-5x-14$

〔　　　　〕

□(9)　x^2-8x-9

〔　　　　〕

チェック3　$x^2+2ax+a^2$，$x^2-2ax+a^2$ の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+6x+9
$=x^2+2\times3\times x+3^2$
$=(x+3)^2$
（●＋▲）^{2} の形にする

(2) $a^2-8a+16$
$=a^2-2\times4\times a+4^2$
$=(a-4)^2$

(3) $25x^2-10x+1$
$=(5x)^2-2\times1\times5x+1^2$
$=(5x-1)^2$
$5x$ を1つの文字とみる

確認問題3　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+2x+1　〔　　　〕
(2) $x^2+14x+49$　〔　　　〕
(3) $x^2-12x+36$　〔　　　〕
(4) $x^2+8xy+16y^2$　〔　　　〕
(5) $4x^2-20x+25$　〔　　　〕
(6) $9a^2+6a+1$　〔　　　〕

チェック4　x^2-a^2 の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-9
$=x^2-3^2$
$=(x+3)(x-3)$
（●＋▲）（●－▲）の形にする

(2) $4x^2-25y^2$
$=(2x)^2-(5y)^2$ ← $2x=$●，$5y=$▲と考える
$=(2x+5y)(2x-5y)$

確認問題4　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-16　〔　　　〕
(2) a^2-49　〔　　　〕
(3) x^2-25　〔　　　〕
(4) $1-y^2$　〔　　　〕
(5) $100x^2-y^2$　〔　　　〕
(6) $4a^2-9b^2$　〔　　　〕
(7) $25x^2-36y^2$　〔　　　〕
(8) $16a^2-49b^2$　〔　　　〕
(9) $9x^2-64y^2$　〔　　　〕

チェック5　いろいろな式の因数分解

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+3ax-10a$
$=a(x^2+3x-10)$　共通因数 a をくくり出す
$=a(x-2)(x+5)$　（　）内を因数分解する

(2) $(x+2)y+(x+2)$
$x+2=M$ とすると，
$(x+2)y+(x+2)$
$=My+M$
$=M(y+1)$
$=(x+2)(y+1)$　Mをもとにもどす

確認問題5　次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2+14x+24$　〔　　　〕
(2) $4ax^2-24ax+36a$　〔　　　〕
(3) $(a-b)x-(a-b)y$　〔　　　〕

単元4　式の計算の利用

教科書 P.34～37

覚えよう！

1　計算のくふう　式の展開や因数分解の公式を利用すると，計算が簡単になる場合がある。

2　式の値　そのまま数を代入しても求めることはできるが，式を簡単にしたり，因数分解したりするなど，くふうしてから代入することが大切。

3　式による証明の基本

(1)　式による証明では，条件を式に表し，それを結論にあった形に変形する。

(2)　偶数は $2n$，奇数は $2n+1$ または $2n-1$（n は整数）

(3)　a の倍数であることの証明は，式が「$a\times$(整数)」の形で表せることを示せばよい。

チェック1　計算のくふう

例題　次の式を，くふうして計算しなさい。

(1)　105^2-95^2
$=(105+95)\times(105-95)$
$=200\times10=$**2000**

(2)　101^2
$=(100+1)^2$
$=100^2+2\times1\times100+1^2$
$=10000+200+1=$**10201**

(3)　52×48
$=(50+2)\times(50-2)$
$=50^2-2^2$
$=2500-4=$**2496**

確認問題1　次の式を，くふうして計算しなさい。

□(1)　65^2-35^2　〔　　　〕

□(2)　127^2-123^2　〔　　　〕

□(3)　104^2　〔　　　〕

□(4)　95^2　〔　　　〕

□(5)　78×82　〔　　　〕

□(6)　103×97　〔　　　〕

チェック2　式の値

例題　次の式の値を求めなさい。

(1)　$x=6$，$y=5$ のとき，$x(x+2y)-(x-2y)(x+5y)$

(2)　$x=12$，$y=28$ のとき，$x^2+2xy+y^2$

解　(1)式を簡単にすると，
$x(x+2y)-(x-2y)(x+5y)$
$=x^2+2xy-(x^2+3xy-10y^2)=-xy+10y^2$
求める値は，$-6\times5+10\times5^2=220$

(2)$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ と因数分解し，
$x=12$，$y=28$ を代入すると，
$(12+28)^2=40^2$
$=1600$

答　(1)　220　　(2)　1600

確認問題2　次の式の値を求めなさい。

□(1)　$x=16$，$y=-3$ のとき，$(x+3y)(x+4y)-(x-y)(x-2y)$　〔　　　〕

□(2)　$x=43$ のとき，x^2-6x+9　〔　　　〕

□(3)　$x=4.75$，$y=1.25$ のとき，x^2-y^2　〔　　　〕

チェック3　数の性質

例題　**連続する2つの奇数の積に1を加えた数は，偶数の2乗になる。このことを証明しなさい。**

解　整数nを使って連続する2つの奇数を$2n-1$，$2n+1$と表し，問題に沿って計算する。

（証明）連続する2つの奇数は，整数nを使って，

$2n-1$，$2n+1$

と表される。

このとき，これらの積に1を加えたものは

$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2=(2n)^2$

nは整数であるから，$2n$は偶数である。

したがって，連続する2つの奇数の積に1を加えた数は，偶数の2乗になる。

確認問題3　「連続する2つの奇数では，大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は，8の倍数になる」ことを，次のように証明した。〔　　〕にあてはまる式を書きなさい。

（証明）連続する2つの奇数は，整数nを使って，小さい順に

〔**ア**　　　　　　〕，$2n+1$と表される。

このとき，大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は

$(2n+1)^2-$〔**イ**　　　　　　〕$=4n^2+4n+1-($〔**ウ**　　　　　　〕$)$

$=4n^2+4n+1-4n^2+$〔**エ**　　　　　　〕

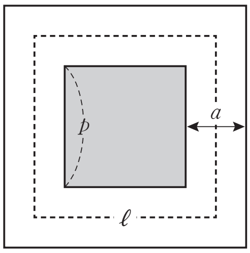
$=$〔**オ**　　　　　　〕

nは整数であるから，$8n$は8の倍数である。

したがって，連続する2つの奇数では，大きい方の奇数の平方から小さい方の奇数の平方をひいた差は，8の倍数になる。

チェック4　図形の性質

例題　**1辺の長さがpの正方形の土地のまわりに，右の図のように幅aの道がついている。この道の面積をS，道の真ん中を通る線の長さをℓとすると，$S=a\ell$と表される。このことを証明しなさい。**



解　小さい正方形の面積，大きい正方形の面積，図の点線で囲まれた正方形の1辺の長さを，それぞれpやaを使って表す。

（証明）小さい正方形の面積はp^2，大きい正方形の面積は$(p+2a)^2$，点線で囲まれた正方形の1辺の長さは$p+a$と表される。

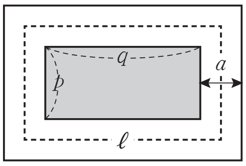
道の面積は，大きい正方形の面積から小さい正方形の面積をひいたものである。

よって　$S=(p+2a)^2-p^2=p^2+4ap+4a^2-p^2=4ap+4a^2$……①

また，$\ell=4(p+a)$であるから　$a\ell=a\times4(p+a)=4ap+4a^2$……②

①，②から　$S=a\ell$

確認問題4　縦の長さがp，横の長さがqの長方形の土地のまわりに，右の図のように幅aの道がついている。この道の面積をS，道の真ん中を通る線の長さをℓとすると，$S=a\ell$と表されることを次のように証明した。〔　　〕にあてはまるものを答えなさい。



（証明）道の面積は，〔**ア**　　　　　　　　　〕から，小さい長方形の面積をひいたものである。

よって　$S=(p+2a)(q+2a)-$〔**イ**　　　　　　〕$=2ap+2aq+4a^2$……①

また，$\ell=2($〔**ウ**　　　　　　〕$)+2(q+a)=2p+2q+4a$であるから

$a\ell=a($〔**エ**　　　　　　〕$)=2ap+2aq+4a^2$……②

①，②から　$S=a\ell$

練　習　問　題　その1

単元3 1

1 共通な因数　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-xy　(2) $ax+3ay$　(3) $2xyz-8yz^2$

〔　〕〔　〕〔　〕

(4) $3ax-9bx+15cx$　(5) $4a^2b-16ab^2+12ab$　(6) $12x^2y-xyz-4xy^2$

〔　〕〔　〕〔　〕

単元3 2

2 $x^2+(a+b)x+ab$ の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+6x+5　(2) x^2+9x+8　(3) a^2-8a+7

〔　〕〔　〕〔　〕

(4) $x^2-10x+24$　(5) a^2-a-20　(6) $x^2-3x-70$

〔　〕〔　〕〔　〕

(7) $x^2+2x-48$　(8) $a^2-6ab-16b^2$　(9) $x^2-15xy+54y^2$

〔　〕〔　〕〔　〕

単元3 3

3 $x^2+2ax+a^2$，$x^2-2ax+a^2$ の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2+4x+4　(2) $x^2+8x+16$　(3) $t^2+18t+81$

〔　〕〔　〕〔　〕

(4) $x^2-10x+25$　(5) $a^2-14a+49$　(6) $x^2-12xy+36y^2$

〔　〕〔　〕〔　〕

(7) $x^2+22x+121$　(8) $16x^2+8x+1$　(9) $9x^2-30x+25$

〔　〕〔　〕〔　〕

単元3 4

4 x^2-a^2 の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) x^2-36　(2) x^2-121　(3) $9x^2-16$

〔　〕〔　〕〔　〕

(4) $49x^2-4$　(5) $4x^2-9y^2$　(6) $64x^2-25y^2$

〔　〕〔　〕〔　〕

単元3 5

5 いろいろな式の因数分解　次の式を因数分解しなさい。

(1) $3x^2-9x-12$　(2) $4x^2+20x+24$　(3) $3x^2-24x+48$

〔　〕〔　〕〔　〕

(4) $2ax^2-2ax-84a$　(5) $4x^2-16y^2$　(6) $9a^2b-4bc^2$

〔　〕〔　〕〔　〕

練　習　問　題　その2

単元4 1

1 計算のくふう　くふうして，次の計算をしなさい。

□(1)　85^2-15^2　　□(2)　37^2-27^2　　□(3)　103^2

〔　　　〕　〔　　　〕　〔　　　〕

□(4)　97^2　　□(5)　57×63　　□(6)　104×96

〔　　　〕　〔　　　〕　〔　　　〕

単元4 2

2 式の値　次の式の値を求めなさい。

□(1)　$x=-12$，$y=3$ のとき，$x(x+6y)+(x-2y)(x-4y)$

〔　　　〕

□(2)　$x=84$ のとき，$x^2+12x+36$

〔　　　〕

□(3)　$x=6.5$，$y=4$ のとき，$4x^2-9y^2$

〔　　　〕

単元4 3

3 数の性質　「連続する2つの整数で，大きい方の数の2乗から2つの数の和をひいた差は，小さい方の数の2乗になる」ことを，次のように証明した。□にあてはまる式を書きなさい。

（証明）　大きい方の整数は，小さい方の整数 n を使って，

$\boxed{ア}$ と表される。

このとき，大きい方の数の2乗から2つの数の和をひいた差は

$\boxed{イ}-\{n+(\boxed{ウ})\}=\boxed{エ}-(2n+1)$

$=\boxed{オ}$

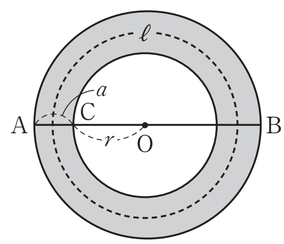
n は小さい方の数であるから，連続する2つの整数で，大きい方の数の2乗から2つの数の和をひいた差は，小さい方の数の2乗になる。

ア〔　　　〕
イ〔　　　〕
ウ〔　　　〕
エ〔　　　〕
オ〔　　　〕

単元4 4

4 図形の性質　右の図のように，線分ABの中点をOとし，半径OAの円をかく。さらに，AC$=a$ となる点Cを OA 上にとり，半径 OC の円をかく。

OC の長さを r，点Oを中心として，AC の中点を通る円の周の長さを ℓ，影の部分の面積を S とするとき，$S=a\ell$ となることを証明しなさい。



〔　　　　〕

Key プラス　その1

1 次の式を因数分解しなさい。

(1) $18x^2-27xy+9x$　(2) $x^2+7x+12$　(3) $5x^2+10x-120$

〔　　〕〔　　〕〔　　〕

(4) a^2b-4b　(5) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$　(6) $3x^2y+33xy+72y$

〔　　〕〔　　〕〔　　〕

(7) $(2x-1)^2-(x+6)^2$　(8) $(x+y)^2-12(x+y)+32$　(9) $z^2(x+y)-9(x+y)$

〔　　〕〔　　〕〔　　〕

単元4 1

2 くふうして，次の計算をしなさい。

(1) $5.9\times357+5.9\times643$　(2) $11^2-12^2+13^2$

〔　　〕〔　　〕

(3) 1004×996　(4) $93^2+2\times93\times7+7^2$

〔　　〕〔　　〕

単元4 2

3 次の式の値を求めなさい。

(1) $x=32$ のとき，$(6-x)(6+x)+(x-4)(x+3)$

〔　　〕

(2) $x=5$，$y=10$ のとき，$16x^2+24xy+9y^2$

〔　　〕

(3) $x=17$，$y=12$ のとき，$x^2y-5xy-14y$

〔　　〕

単元4 3

4 連続する2つの偶数で，大きい方の偶数の2乗から小さい方の偶数の2乗をひいた差は，4の倍数になる。このことを証明しなさい。

〔　　〕

Key プラス　その2

1 次の式を因数分解しなさい。

□(1)　$24x^2+16xy$　□(2)　$5x^2+10x-120$　□(3)　$8x^2-72$

□(4)　a^2b-4b　□(5)　$3x^2y+33xy+72y$　□(6)　$(x+y)^2-36$

□(7)　$(x-y)^2-20(x-y)+100$　□(8)　$(a-b)c-(b-a)$　□(9)　$x^2+xy-yz-zx$

単元4 1

2 くふうして，次の計算をしなさい。

□(1)　1.05^2　□(2)　$55^2\times3.14-45^2\times3.14$

□(3)　$913^2-26\times913+13^2$　□(4)　$25^2-24^2+23^2-21^2$

3 次の問いに答えなさい。

□(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ となることを用いて，$x+y=4$，$xy=-2$ のときの，x^2+y^2 の値を求めなさい。

(2)　$x+y=-1$，$xy=-6$ のとき，次の式の値を求めなさい。

□①　x^2+y^2　□②　x^2+xy+y^2　□③　$(x-y)^2$

単元4 4

4 □ 1辺の長さが p の正方形の土地のまわりに，右の図のように幅 a の道がついている。この道の面積を S，道の中央を通る線の長さを ℓ とするとき，$S=a\ell$ となることを証明しなさい。