単元 25　円周角の定理の利用

教科書 P.179〜183

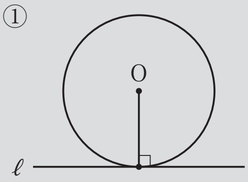
覚えよう！

1　円と接線

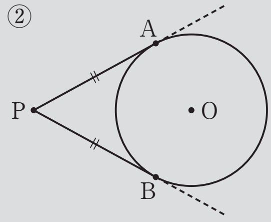
(1)　円の接線は、接点を通る半径に垂直である。(①)

(2)　円外の1点から、その円にひいた2つの接線の長さは等しい。(②)

①

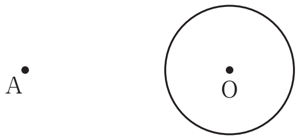


②



チェック1　円周角の定理と作図(1)

例題　**右の図で、点Aを通る円Oの接線AP、AP′を作図しなさい。**



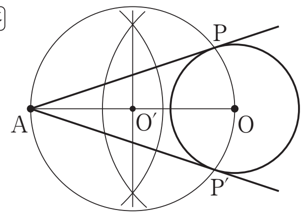
解　AP、AP′は円Oの接線だから、AP⊥OP、AP′⊥OP′となるので、PおよびP′はAOを直径とする円周上にあるといえる。

作図手順は、①AOの垂直二等分線をひき、AOの中点をO′とする。

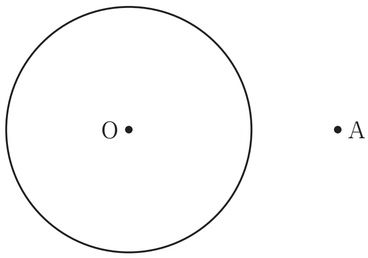
②中心がO′、半径がO′Aの円をかき、円Oとの交点をP、P′とする。

③AとPおよびAとP′を通る直線をひく。

答

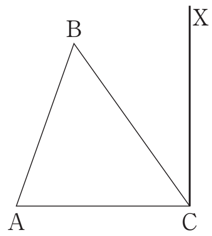


確認問題1　右の図で、点Aを通る円Oの接線AP、AP′を作図しなさい。



チェック2　円周角の定理と作図(2)

例題　**右の図の半直線CX上に、∠ABC＝∠APCとなる点Pを作図しなさい。**

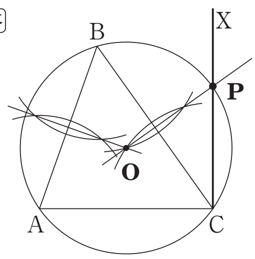


解　3点A、B、Cを通る円と半直線CXとの交点をPとすれば、円周角の定理より、∠ABC＝∠APC

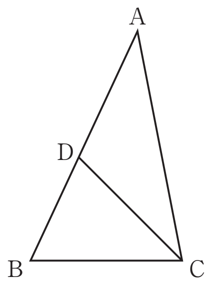
作図手順は、①AB、BCそれぞれについて垂直二等分線をかき、その交点をOとする。

②中心がO、半径OAの円をかき、半直線CXとの交点をPとする。

答

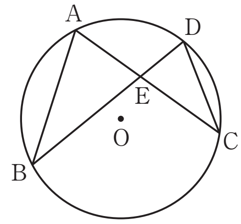


確認問題2　右の図の△ABCで、辺AB上に点Dをとる。辺AC上に、∠BPC＝∠BDCとなる点Pを作図しなさい。



チェック3　円周角の定理と証明

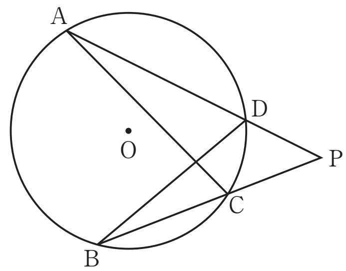
例題　**右の図のように、円Oの円周上に4点A、B、C、Dがある。弦ACとBDとの交点をEとすると、△AEB∽△DECであることを証明しなさい。**



解　（証明）　△AEBと△DECにおいて
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから
∠BAE＝∠CDE……①
$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから
∠ABE＝∠DCE……②
①、②より、2組の角がそれぞれ等しいから
△AEB∽△DEC

←対頂角は等しいから、∠AEB＝∠DECとしてもよい

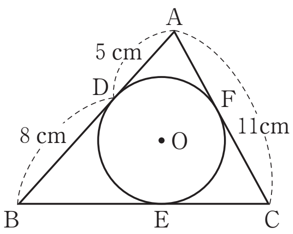
確認問題3　右の図で、PA：PC＝PB：PDであることを次のように証明した。
〔　〕をうめなさい。



（証明）　△ACPと△BDPにおいて
$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいから
∠CAP＝〔ア　　　　　　〕……①
また、　∠Pは共通……②
①、②より、〔イ　　　　　　　　　　　　〕から
△ACP∽△BDP
対応する辺の比は等しいから
PA：PB＝PC：PD
よって　PA：PC＝〔ウ　　　　　〕

チェック4　円と接線

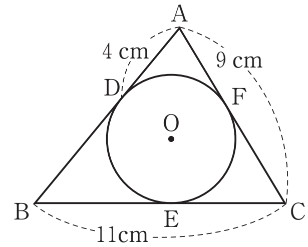
例題　**右の図の△ABCで、3辺が円Oに、D、E、Fで接するとき、次の線分の長さを求めなさい。**
(1)　BE　　　**(2)　BC**



解　(1)　円外の1点から、その円にひいた2本の接線の長さは等しいので、
BE＝BD＝8 cm
(2)　AF＝AD＝5 cm、EC＝FC＝AC－AF＝11－5＝6(cm)だから、
BC＝BE＋EC＝8＋6＝14(cm)

答　(1)　8 cm　　(2)　14cm

確認問題4　右の図の△ABCで、3辺が円OにD、E、Fで接する。



(1)　CEの長さを求めなさい。

〔　　　　　　　〕

(2)　ABの長さを求めなさい。

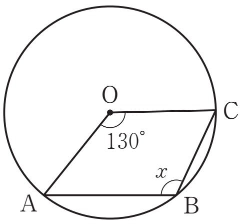
〔　　　　　　　〕

練　習　問　題　その1

単元24 1

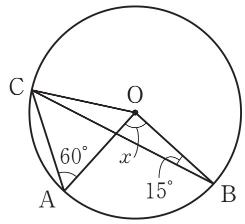
1 円周角の定理　次の図で、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



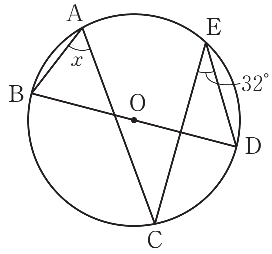
〔　　　　　　　〕

(2)



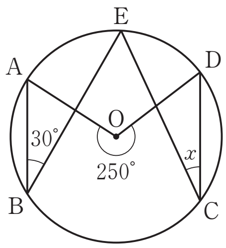
〔　　　　　　　〕

(3)



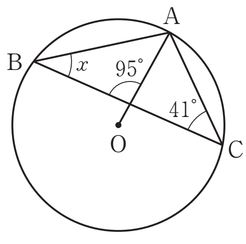
〔　　　　　　　〕

(4)



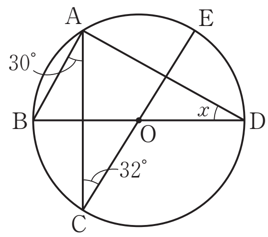
〔　　　　　　　〕

(5)



〔　　　　　　　〕

(6)

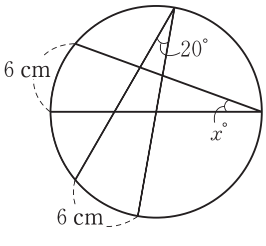


〔　　　　　　　〕

単元24 2

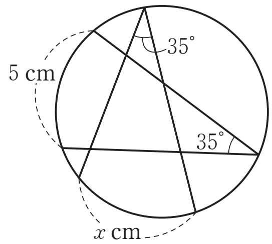
2 円周角と弧　次の x の値を求めなさい。

(1)



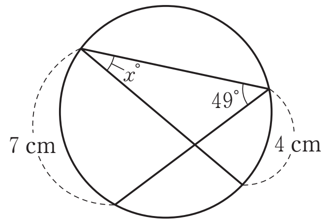
〔　　　　　　　〕

(2)



〔　　　　　　　〕

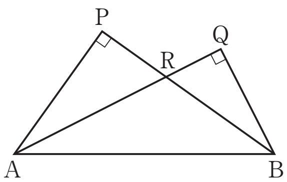
(3)



〔　　　　　　　〕

単元24 3

3 円周角の定理の逆　右の図で、$\angle \mathrm{APB}=\angle \mathrm{AQB}=90°$ であり、点Rは線分AQ、BPの交点である。この図形について、次の〔　〕をうめなさい。



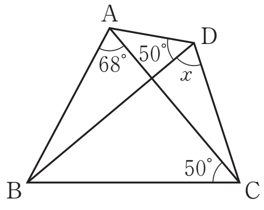
・４点P、A、B、〔**ア**　　　　　〕は１つの円周上にある。

・点Pは線分〔**イ**　　　　　〕または線分ARを直径とする円周上にある。

単元24 3

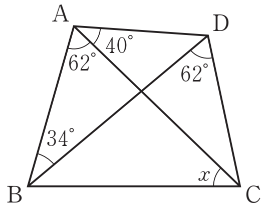
4 円周角の定理の逆　次の図で、$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



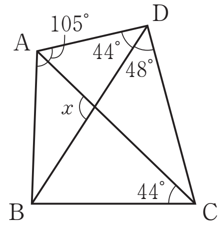
〔　　　　　　　〕

(2)



〔　　　　　　　〕

(3)



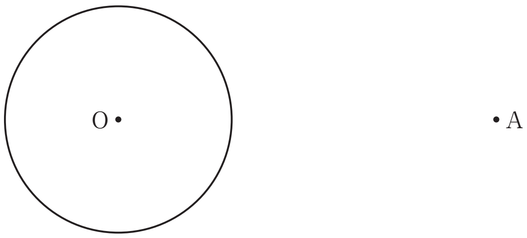
〔　　　　　　　〕

練　習　問　題　その2

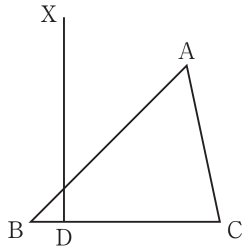
単元25 1、2

1 円周角の定理と作図　次の問に答えなさい。

(1)　点Aを通る円Oの接線 AP、AP′ を作図しなさい。



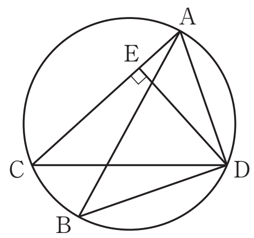
(2)　下の図の半直線 DX 上に、∠BPC＝∠BAC となる点Pを作図しなさい。ただし、点Dは辺 BC 上の点とする。



単元25 3

2 円周角の定理と証明　右の図で、線分 AB は円の直径であり、点C、Dはこの円の周上にある。点Dから線分 AC に垂線をひき、その交点をEとする。

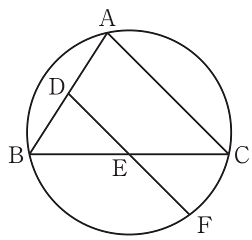
このとき、△ABD∽△DCE であることを証明しなさい。



〔　　　　〕

単元25 3

3 円周角の定理と証明　右の図のように、3つの頂点が1つの円周上にある △ABC がある。辺 AB の中点をDとし、辺 BC 上に点Eをとって、DE の延長と円周との交点をFとする。次の問に答えなさい。



(1)　AD＝DE、∠BAE＝40°のとき、∠ABE の大きさを求めなさい。

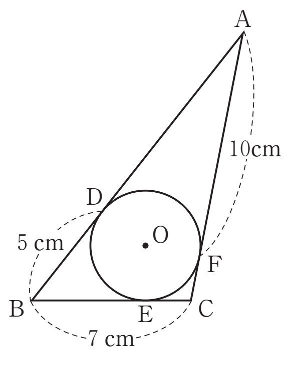
〔　　　　〕

(2)　AC∥DF、AC＝DF のとき、∠ABC＝∠BAF であることを証明しなさい。

〔　　　　〕

単元25 4

4 円と接線　右の図の △ABC で、3辺が円Oに D、E、F で接するとき、次の線分の長さを求めなさい。



(1)　AB

〔　　　　〕

(2)　AC

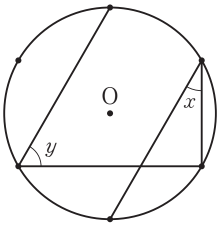
〔　　　　〕

Keyプラス

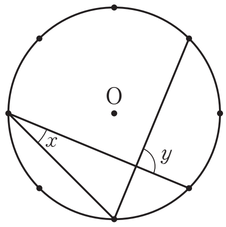
単元24 2

1 次の図で、円周上の点は円周をそれぞれ等分する。∠x、∠y の大きさを求めなさい。

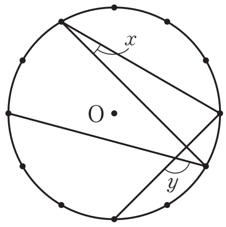
□(1)



□(2)



□(3)

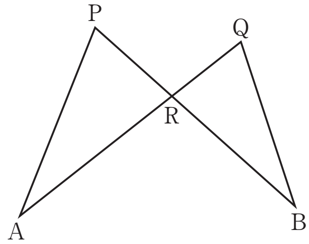


∠x〔　　　　〕　∠x〔　　　　〕　∠x〔　　　　〕

∠y〔　　　　〕　∠y〔　　　　〕　∠y〔　　　　〕

単元24 3

2 右の図で、次のような関係があるとき、点A、B、P、Qの位置関係はどのようになっていますか。下の**ア**～**ウ**から選びなさい。



□(1)　∠APB＝70°、∠AQB＝60°

□(2)　∠APB＝70°、∠BRQ＝80°、∠PBQ＝30°

□(3)　∠PAR＝30°、∠ARB＝100°、∠AQB＝80°

ア　点Qは、3点A、B、Pを通る円の周上にある。

イ　点Qは、3点A、B、Pを通る円の内部にある。

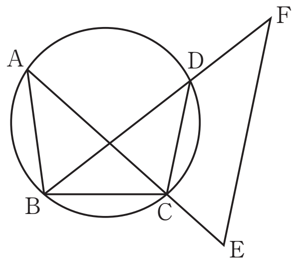
ウ　点Qは、3点A、B、Pを通る円の外部にある。

(1)〔　　　　〕　(2)〔　　　　〕　(3)〔　　　　〕

単元24 3

3 右の図で、A、B、C、Dは円周上の点である。Eは弦ACの延長上に、Fは弦BDの延長上にあり、CD∥EFである。このとき、4点A、B、E、Fは1つの円周上にあることを証明しなさい。

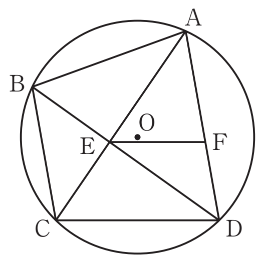
□



〔　　　　〕

4 右の図のように、四角形ABCDの4つの頂点は円Oの周上にあり、EF∥CDである。このとき、△ABC∽△EFDであることを証明しなさい。

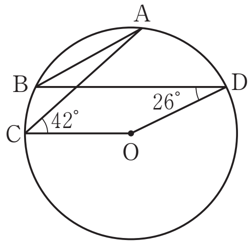
□



〔　　　　〕

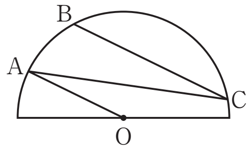
応用力UP！　Key プラス　～円の性質～

1 右の図で、４点Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄは、点Ｏを中心とする円の周上にあり、BD∥CO である。∠ACO＝42°、∠BDO＝26° であるとき、∠ABD の大きさを求めなさい。



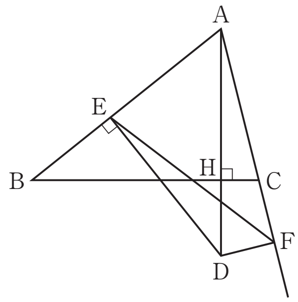
〔　　　　　　　　〕

2 右の図のように、半円Ｏの周上に３点Ａ、Ｂ、Ｃがある。点Ｏと点Ａ、点Ａと点Ｃ、点Ｃと点Ｂをそれぞれ結ぶ。OA∥CB、$\overset{\frown}{AB}$：$\overset{\frown}{BC}$＝1：3 のとき、∠ACB の大きさを求めなさい。



〔　　　　　　　　〕

3 右の図のように、△ABC の頂点Ａから辺 BC に垂線 AH をひき、AH の延長上の点Ｄから辺 AB に垂線 DE をひく。次に、辺 AC の延長上に、∠DAF＝∠DEF となるように点Ｆをとる。次の問に答えなさい。



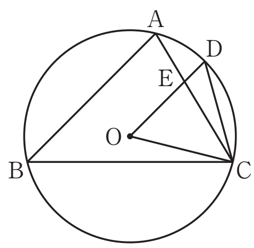
□(1)　△ABH∽△ADE を証明しなさい。

〔　　　　　　　　〕

□(2)　４点Ｂ、Ｆ、Ｃ、Ｅは、１つの円周上にあることを証明しなさい。

〔　　　　　　　　〕

4 右の図のように、円Ｏの周上に４点Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄがあり、∠ABC＝∠ACO、$\overset{\frown}{AB}$＝2$\overset{\frown}{CD}$ である。また、AC と DO との交点をＥとする。次の問に答えなさい。



□(1)　△ABC∽△ECO であることを証明しなさい。

〔　　　　　　　　〕

□(2)　∠ABC の大きさを求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

知識・技能　重要用語と公式の穴うめ問題

次の空欄をうめなさい。

1　円周角の定理　単元24

〈円周角の定理〉(図１)

円Oにおいて、$\overset{\frown}{AB}$ を除く円周上の点をPとするとき、∠APB を $\overset{\frown}{AB}$ に対する $\boxed{\text{ア}\qquad}$ という。

また、$\overset{\frown}{AB}$ を円周角 ∠APB に対する $\boxed{\text{イ}\qquad}$ という。

図１

１つの弧に対する円周角の大きさは $\boxed{\text{ウ}\qquad}$ であり、その弧に対する中心角の $\boxed{\text{エ}\qquad}$ である。

図２

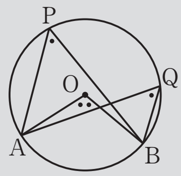


図２で、

∠APB＝∠$\boxed{\text{オ}\qquad}$

$=\dfrac{1}{2}$∠$\boxed{\text{カ}\qquad}$

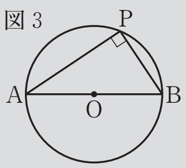
〈直径と円周角〉(図３)

線分 AB を直径とする円の周上に A、Bと異なる点Pをとれば、

∠APB＝$\boxed{\text{キ}\qquad}$°

である。

図３



逆に、円周上の３点A、P、Bについて、∠APB＝90°ならば、線分 AB は $\boxed{\text{ク}\qquad}$ になる。

〈円周角と弧〉　１つの円において、

等しい円周角に対する弧は

$\boxed{\text{ケ}\qquad}$。

等しい弧に対する円周角は

$\boxed{\text{コ}\qquad}$。

図４

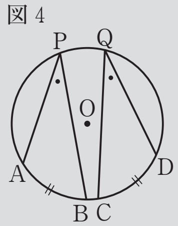


図４で、

∠APB＝∠CQD ならば、$\overset{\frown}{AB}$＝$\boxed{\text{サ}\qquad}$

$\overset{\frown}{AB}$＝$\overset{\frown}{CD}$ ならば、∠APB＝∠$\boxed{\text{シ}\qquad}$

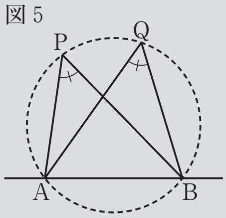
〈円周角の定理の逆〉(図５)

４点A、B、P、Qについて、P、Qが直線 AB の同じ側にあって、

∠APB＝∠$\boxed{\text{ス}\qquad}$

ならば、この４点は１つの円周上にある。

図５



2　円周角の定理の利用　単元25

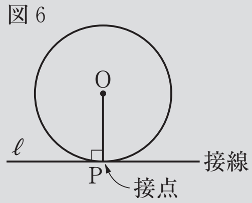
〈円と接線〉

円の接線は、その接点を通る $\boxed{\text{ア}\qquad}$ に垂直である。

図６で、

$\ell\perp$ $\boxed{\text{イ}\qquad}$

図６



円外の１点から、その円にひいた２つの $\boxed{\text{ウ}\qquad}$ の長さは等しい。

図７

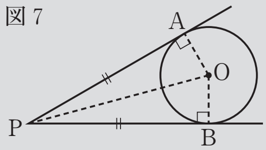


図７で、PA、PB が円Oの接線のとき、

PA＝$\boxed{\text{エ}\qquad}$ となる。

このことは、次のように証明することができる。

△PAO と △PBO において、

PA、PB は円Oの接線だから、

∠PAO＝∠$\boxed{\text{オ}\qquad}$＝$\boxed{\text{カ}\qquad}$°

円Oの半径だから、OA＝$\boxed{\text{キ}\qquad}$

また、PO は共通

よって、直角三角形の斜辺と他の $\boxed{\text{ク}\qquad}$ がそれぞれ等しいから、△PAO≡△$\boxed{\text{ケ}\qquad}$

したがって、PA＝PB

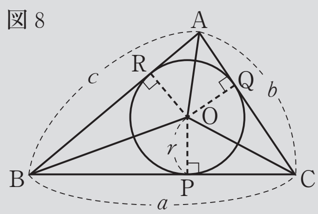
［参考］

〈三角形の面積と三角形の３辺に接する円の半径〉

図８で、△ABC の３辺は円Oと接している。

接点をそれぞれP、Q、R、円Oの半径を r とする。

図８



このとき、△ABC の面積は、

△ABC＝△BCO＋△CAO＋△ABO

$=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$

$=\dfrac{1}{2}\underbrace{(a+b+c)}_{}r$

△ABC の周の長さ

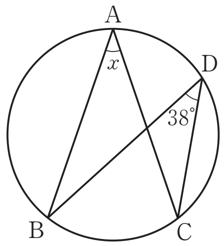
知識・技能

重要パターン問題

●円周角の定理

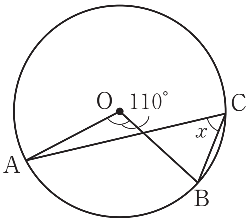
1 円周角の定理　次の図で、$\angle x$の大きさを求めなさい。

(1)



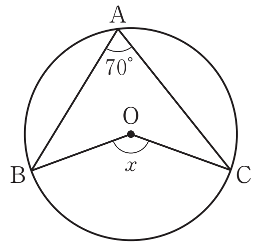
〔　　　　　　〕

(2)



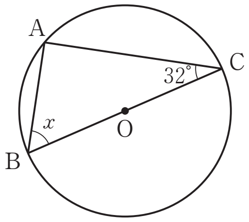
〔　　　　　　〕

(3)



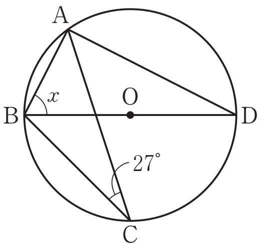
〔　　　　　　〕

(4)



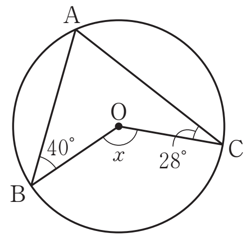
〔　　　　　　〕

(5)



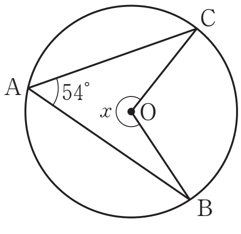
〔　　　　　　〕

(6)



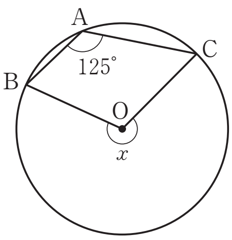
〔　　　　　　〕

(7)



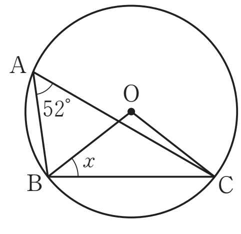
〔　　　　　　〕

(8)



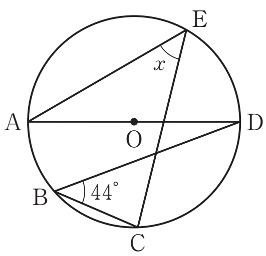
〔　　　　　　〕

(9)



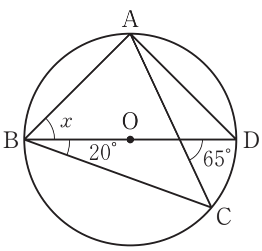
〔　　　　　　〕

(10)



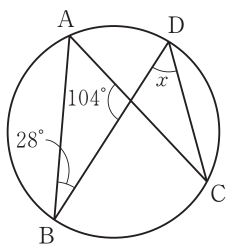
〔　　　　　　〕

(11)



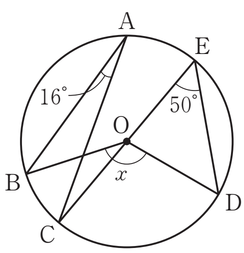
〔　　　　　　〕

(12)



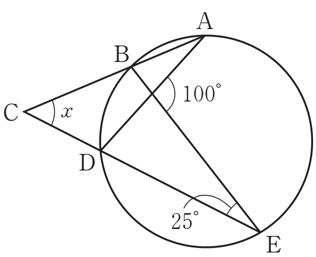
〔　　　　　　〕

(13)



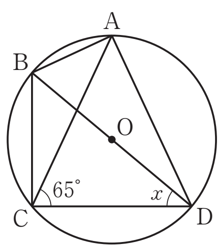
〔　　　　　　〕

(14)



〔　　　　　　〕

(15)



（AC＝AD）

〔　　　　　　〕

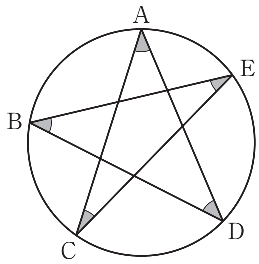
思考・判断・表現

思考と活用問題

- 円周角と弧の利用
- 円周角の定理の逆の利用

1　円周角と弧の利用

右の図は、円周上に5つの点をとり、1つおきに結んだものです。
このような図で、印をつけた角の和について、考えてみましょう。



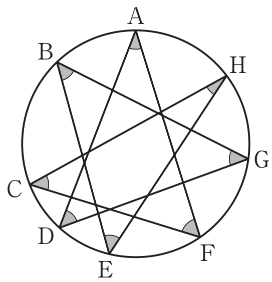
次のように角とそれに対応する弧を整理してみましょう。

$\angle$A	$\angle$B	$\angle$C	$\angle$D	$\angle$E
$\overset{\frown}{CD}$	$\overset{\frown}{DE}$	$\overset{\frown}{EA}$	$\overset{\frown}{AB}$	$\overset{\frown}{BC}$

上の表で、弧の和を考えると円1周分になります。円1周分に対応する中心角は360°だから、
$\angle$A、$\angle$B、$\angle$C、$\angle$D、$\angle$Eの円周角の和は、その半分の180°になります。

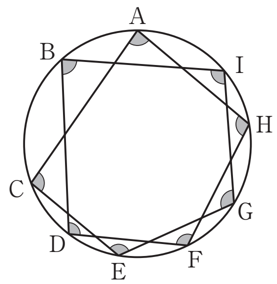
1　下の図は、円周上にいくつかの点をとり、その点をある規則にしたがって結んだものである。円周角の定理を使って、印をつけた角の和は何度になるか求めなさい。

□(1)　円周上に8つの点をとり、点を2つおきに結ぶ



〔　　　　　　〕

□(2)　円周上に9つの点をとり、点を1つおきに結ぶ



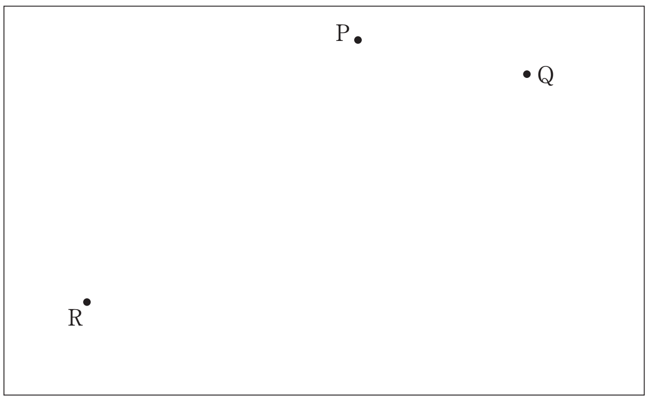
〔　　　　　　〕

2　円周角の定理の逆の利用

2　Aさんが休日に出かけた公園の図を見て、昼の弁当を食べた場所がどこなのかを考えている。
□次の[　　　]内は、公園で弁当を食べたときのようすについて話している、AさんとBさんの会話である。

Aさん：わたしが休日に出かけた公園は、下の図のように長方形の形をしていたよ。
Bさん：図の中にあるP、Q、Rは、3本の大きな木だね。
Aさん：そうだよ。わたしは、昼の弁当を食べた場所で、木Pが正面になるように体を向けたあと、体を30°右に動かしたら、木Qが正面にあったんだ。
Bさん：そのあとはどうしたの？
Aさん：そのあと、さらに体を150°右に動かしたら、木Rが正面にあったんだ。
Bさん：なるほど。これで、Aさんが昼の弁当を食べた場所がわかるね。

Aさんが昼の弁当を食べた場所はどこですか。Aさんが昼の弁当を食べた場所をSとして、点Sを作図によって求めなさい。



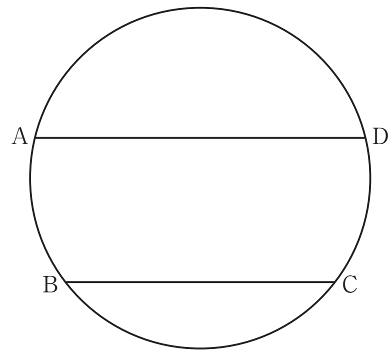
思考・判断・表現

高得点をめざす問題

●円の性質と証明

1　円の性質と証明

1　右の図で、A、B、C、Dは円周上の点である。次の問に答えなさい。



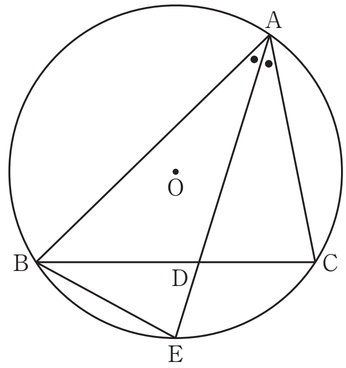
□(1)　AD∥BC ならば、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ であることを証明しなさい。

［　　］

□(2)　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ならば、AD∥BC であることを証明しなさい。

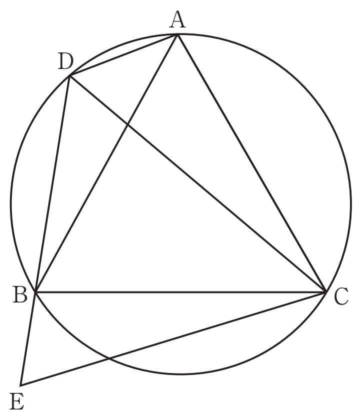
［　　］

2　右の図で、A、B、Cは円Oの周上の点である。∠A の二等分線と辺 BC、円Oとの交点をそれぞれD、Eとするとき、△ABE∽△BDE であることを証明しなさい。



［　　］

3　右の図で、A、B、Cは円周上の点で、△ABC は正三角形である。$\overset{\frown}{AB}$ 上に点Dをとり、線分 DB の延長上に ED＝EC となる点Eをとるとき、次の問に答えなさい。



□(1)　△CDE は正三角形であることを証明しなさい。

［　　］

□(2)　AD＝BE であることを証明しなさい。

［　　］