

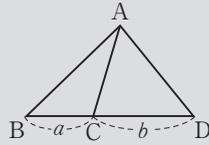


22

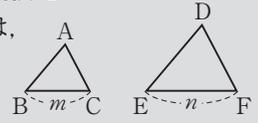
相似な図形の面積と体積(1)

学習のまとめ

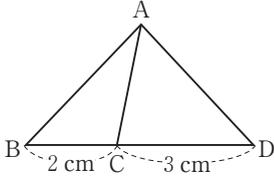
1 底辺の比と三角形の面積比
高さが等しい三角形の面積比は、底辺の長さの比に等しい。
 $\triangle ABC : \triangle ACD = a : b$



2 相似な図形の周の長さの比と面積比
相似比が $m : n$ の平面図形では、
周の長さの比 $\dots m : n$
面積比 $\dots m^2 : n^2$



チェック1 底辺の比と面積比

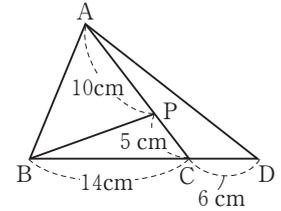


高さを h とすると、
 $\triangle ABC : \triangle ACD$
 $= \left(\frac{1}{2} \times 2 \times h\right) : \left(\frac{1}{2} \times 3 \times h\right)$
 $= 2 : 3$

⇒ 1

確認問題

1 右の図で、 $\triangle ABC$ の面積が 84cm^2 のとき、次の三角形の面積を求めなさい。



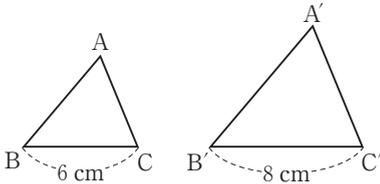
- ①
- (1) $\triangle ACD$ の面積
- (2) $\triangle BCP$ の面積

[]

[]

チェック2 相似な図形の面積比

次の図で、 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ である。下の問に答えなさい。



- (1) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の周の長さの比を求めなさい。
- (2) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の面積比を求めなさい。
- (3) $\triangle ABC$ の面積が 18cm^2 のとき、 $\triangle A'B'C'$ の面積を求めなさい。

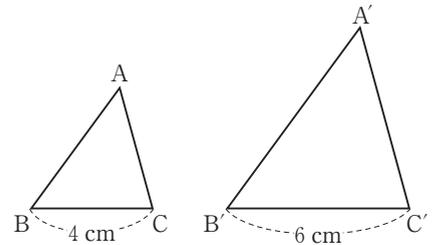
- (1) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の相似比は、
 $BC : B'C' = 6 : 8 = 3 : 4$
周の長さの比は相似比に等しい。
- (2) 面積比は相似比の2乗に等しいから、
 $3^2 : 4^2 = 9 : 16$
- (3) $\triangle A'B'C'$ の面積を $S\text{cm}^2$ とすると、
 $18 : S = 9 : 16$, $S = 32$

〔答〕 (1) $3 : 4$ (2) $9 : 16$
(3) 32cm^2

⇒ 2

2 右の図で、

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ である。次の問に答えなさい。



- ②
- (1) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の相似比を求めなさい。

[]

- (2) $\triangle ABC$ の周の長さが 14cm のとき、 $\triangle A'B'C'$ の周の長さを求めなさい。

[]

- (3) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の面積比を求めなさい。

[]

- (4) $\triangle ABC$ の面積が 8cm^2 のとき、 $\triangle A'B'C'$ の面積を求めなさい。

[]

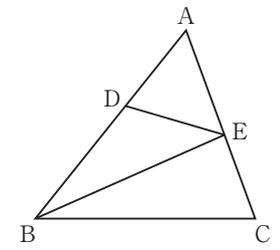
基本問題

① 底辺の比と面積比 右の図の $\triangle ABC$ で、 $AD : DB = 2 : 3$ 、 $AE : EC = 5 : 4$ のとき、次の三角形の面積比を求めなさい。

(1) $\triangle ABE : \triangle ABC$

[]

(2) $\triangle DBE : \triangle ABC$



[]

② 相似な図形の面積比① 次の問に答えなさい。

(1) 相似な2つの図形P, Qがあって、相似比は2:5である。Pの周の長さが16cmのとき、Qの周の長さを求めなさい。

[]

(2) 相似な2つの図形P, Qがあって、相似比は3:4である。Pの面積が 63cm^2 のとき、Qの面積を求めなさい。

[]

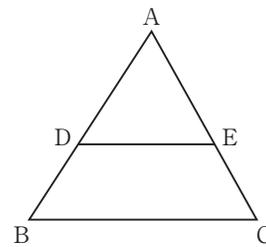


③ 相似な図形の面積比② 右の図の $\triangle ABC$ で、 $DE \parallel BC$ 、 $AD : DB = 3 : 2$ である。次の問に答えなさい。

(1) $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めなさい。

[]

(2) $\triangle ADE$ と台形DBCEの面積比を求めなさい。



[]

(3) $\triangle ADE$ の面積が 45cm^2 のとき、台形DBCEの面積を求めなさい。

[]

DE // BC より、
 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ となる。
AD と **AB** が対応し、相似比は $3 : (3+2) = 3 : 5$ 。
 これより、 $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ の面積比がわかる。
 $\triangle ADE$ と台形DBCEの面積比は、台形DBCEの面積が、 $\triangle ABC - \triangle ADE$ であることから求める。



④ 相似な図形の面積比③ 右の図の $\triangle ABC$ で、点D, Eは辺ABを3等分する点、点F, Gは辺ACを3等分する点である。次の問に答えなさい。

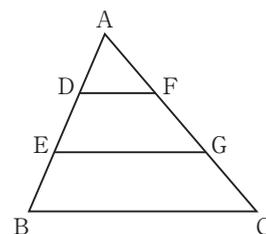
(1) $\triangle ADF$ の面積を a とするとき、四角形DEGF、四角形EBCGの面積を、それぞれ a を使って表しなさい。

四角形DEGF []

四角形EBCG []

(2) $\triangle ABC = 54\text{cm}^2$ のとき、四角形DEGFの面積を求めなさい。

[]



$\triangle ADF \sim \triangle AEG$ で、相似比は $1 : 2$ である。
 また、 $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ で、相似比は $1 : 3$ である。
 このことから、まず $\triangle AEG$ の面積と $\triangle ABC$ の面積を a で表す。



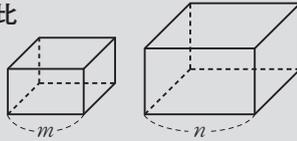
23

相似な図形の面積と体積(2)

学習のまとめ

1 相似な立体の表面積の比と体積比

相似比が $m:n$ の立体では、
 表面積の比 $\dots m^2:n^2$
 体積比 $\dots m^3:n^3$

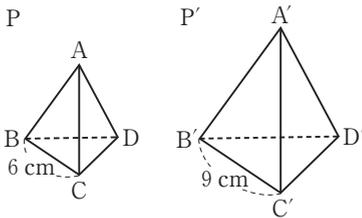


相似な立体では、

- ・対応する線分の長さの比は、すべて等しい。
- ・対応する面は、それぞれ相似である。
- ・対応する角の大きさは、それぞれ等しい。

チェック1 相似な立体

次の三角錐Pと三角錐P'は相似である。
 下の問に答えなさい。



- (1) 三角錐Pと三角錐P'の相似比を求めなさい。
- (2) 三角錐Pと三角錐P'の表面積の比を求めなさい。
- (3) 三角錐Pの体積が 32cm^3 のとき、三角錐P'の体積を求めなさい。

(1) $BC : B'C' = 6 : 9 = 2 : 3$

(2) $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

(3) 体積比は、 $2^3 : 3^3 = 8 : 27$

三角錐P'の体積を $V\text{cm}^3$ とすると、

$32 : V = 8 : 27, V = 108$

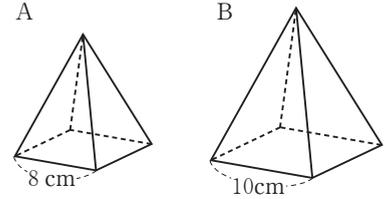
答 (1) $2:3$ (2) $4:9$

(3) 108cm^3

⇒ 1, 2

確認問題

1 右の図で、正四角錐Aと正四角錐Bは相似である。
 次の問に答えなさい。 ⇒ ①



- (1) 正四角錐AとBの表面積の比を求めなさい。

[]

- (2) 正四角錐Aの表面積が 240cm^2 のとき、正四角錐Bの表面積を求めなさい。

[]

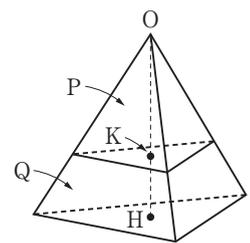
- (3) 正四角錐AとBの体積比を求めなさい。

[]

- (4) 正四角錐Aの体積が 320cm^3 のとき、正四角錐Bの体積を求めなさい。

[]

2 右の図の三角錐を、高さOHを2:1に分ける点Kを通り、底面に平行な平面で、2つの部分P、Qに分けると、次の問に答えなさい。 ⇒ ②



- (1) 三角錐Pもとの三角錐の表面積の比を求めなさい。

[]

- (2) 三角錐Pと立体Qの体積比を求めなさい。

[]

- (3) 三角錐Pの体積が 48cm^3 のとき、立体Qの体積を求めなさい。

[]

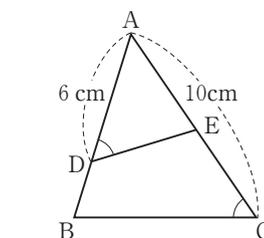
Key プラス

1 右の図の $\triangle ABC$ で、 $\angle ADE = \angle ACB$ である。次の問に答えなさい。

(1) $\triangle AED$ と $\triangle ABC$ の相似比を求めなさい。

[]

(2) $\triangle AED$ の面積が 13.5cm^2 のとき、四角形 $DBCE$ の面積を求めなさい。



[]

2 次の問に答えなさい。

(1) 相似な2つの図形A, Bがあって、面積比は $16:49$ である。相似比を求めなさい。

[]

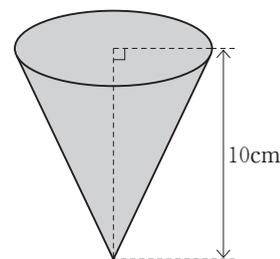
(2) 相似な2つの図形A, Bがあって、面積比は $64:25$ である。周の長さの比を求めなさい。

[]

3 右の図のような深さが 10cm の円錐の容器に水がいっぱいに入っている。この水の体積の $\frac{4}{5}$ をこぼしたら、容器の水の深さは何 cm になりますか。次のうちからもっとも適するものを選び、記号で答えなさい。

ア 約 4cm イ 約 6cm ウ 約 8cm

[]



4 次の問に答えなさい。

(1) 2つの相似な直方体A, Bがあって、底面積の比は $4:49$ である。A, Bの高さの比と体積比を求めなさい。

高さの比 [] 体積比 []

(2) 2つの相似な円柱P, Qがあって、表面積の比は $36:25$ である。円柱Pの体積が $432\pi\text{cm}^3$ のとき、円柱Qの体積を求めなさい。

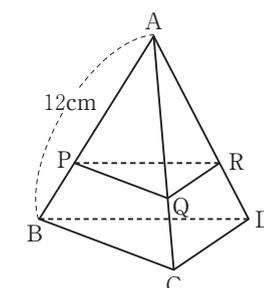
[]

5 右の図で、三角錐 $A-BCD$ を辺 AB 上の点 P を通り、底面 BCD に平行な平面で切った切り口を $\triangle PQR$ とする。次の問に答えなさい。

(1) $\triangle PQR$ の面積が、 $\triangle BCD$ の面積の $\frac{1}{2}$ となるようにするには、点 P を頂点 A から何 cm のところにとればよいですか。

[]

(2) (1)のように点 P をとったとき、三角錐 $A-BCD$ の体積は、三角錐 $A-PQR$ の体積の何倍になりますか。



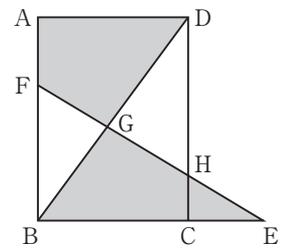
[]

Key プラス 相似の利用の特訓

その2

1 右の図のような長方形 ABCD があり, 点 E は辺 BC の延長上の点で, $BC : CE = 2 : 1$ である。辺 AB 上に, 2 点 A, B と異なる点 F をとり, 点 E と F を結ぶ。また, 線分 EF と対角線 BD, 辺 CD との交点をそれぞれ G, H とする。

四角形 AFGD と $\triangle BEG$ の面積が等しいとき, 線分 CH の長さは線分 HD の長さの何倍ですか。

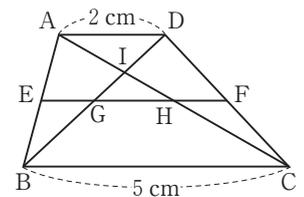


[]

2 右の図のように, $AD \parallel BC$ の台形 ABCD の辺 AB, DC の中点をそれぞれ E, F とする。線分 EF と線分 BD, AC との交点をそれぞれ G, H, 線分 AC と線分 BD との交点を I とする。

$AD = 2 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ のとき, 次の間に答えなさい。

(1) 線分 GH の長さを求めなさい。

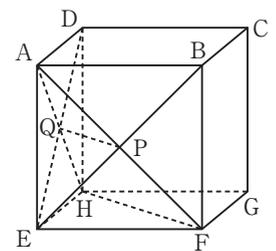


[]

(2) 台形 ABCD の面積は, $\triangle GHI$ の面積の何倍ですか。

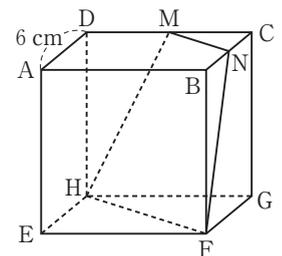
[]

3 右の図の立方体 ABCD-EFGH で, 点 P, Q はそれぞれ AF と BE, AH と DE との交点である。立体 AEPQ と立体 PQEFH の体積比をもっとも簡単な整数の比で表しなさい。



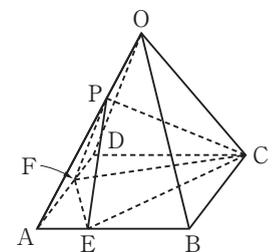
[]

4 右の図の立方体 ABCD-EFGH で, 点 M, N はそれぞれ辺 CD, BC の中点である。点 M, H, F, N を通る平面で立方体を切り分けたとき, 点 C をふくむほうの立体の体積を求めなさい。



[]

5 右の図のように, 底面が正方形である四角錐 O-ABCD がある。 $OP : PA$, $AE : EB$, $DF : FA$ はすべて $1 : 2$ である。このとき, 四角錐 O-ABCD と立体 PECF の体積比をもっとも簡単な整数の比で表しなさい。



[]

実施時間のめやす⇒15分

1 右の図で、四角形 ABCD の四角形 EFGH である。このとき、次の間に答えなさい。(各6点)

(1) $\angle H$ の大きさを求めなさい。

[]

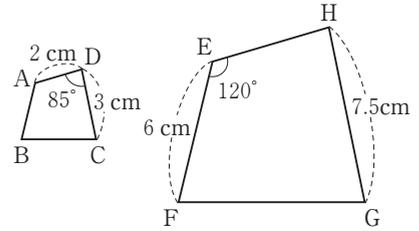
(2) 四角形 ABCD と四角形 EFGH の相似比を求めなさい。

[]

(3) 辺 AB, EH の長さを求めなさい。

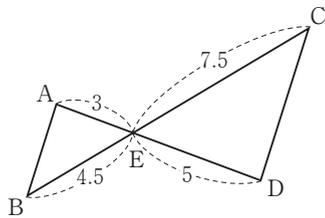
AB []

EH []



2 次のそれぞれの図において、相似な三角形を記号のを使って表し、そのときに使った相似条件を答えなさい。(各8点)

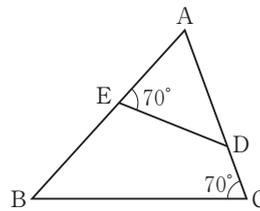
(1)



三角形 []

相似条件 []

(2)



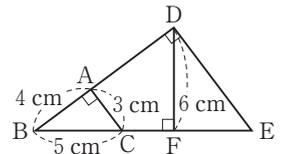
三角形 []

相似条件 []

3 右の図で、 $\angle BAC$, $\angle BDE$, $\angle BFD$ は直角である。DE, CF の長さを求めなさい。(各8点)

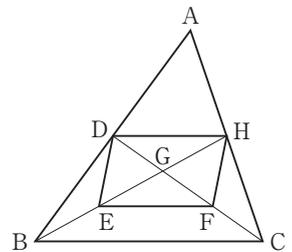
DE []

CF []



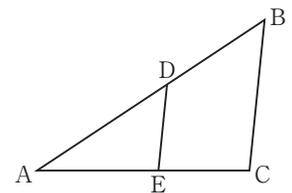
4 右の図の $\triangle ABC$ で、D, H はそれぞれ辺 AB, AC の中点、G は BH と CD の交点である。また、E, F はそれぞれ BG, CG の中点である。四角形 DEFH は平行四辺形であることを証明しなさい。(12点)

[]



5 右の図の $\triangle ABC$ で、 $DE \parallel BC$ で、 $AD : DB = 4 : 3$ である。台形 DECB の面積が 198cm^2 のとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。(8点)

[]



6 相似な2つの立体P, Qがあって、相似比が2:5である。立体Qの体積が立体Pの体積より 1053cm^3 大きいとき、立体Qの体積を求めなさい。(8点)

[]

5章

テストB

得点
/100点

実施時間のめやす⇒18分

1 右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺BC上に点Pをとり、 $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ となるように点Qをとる。点QとCを結ぶとき、 $\triangle ABP \sim \triangle ACQ$ となることを次のように証明した。証明を完成させなさい。(各6点)

(証明) $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ なので、対応する辺の比や角はそれぞれ等しく、

$$AB : AP = AC : [\text{ア}] \dots\dots ①$$

$$\angle BAC = [\text{イ}] \dots\dots ②$$

である。

$\triangle ABP$ と $\triangle ACQ$ において、

$$①より、AB : AC = AP : [\text{ウ}] \dots\dots ③$$

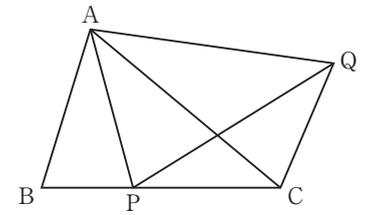
$$\text{また、} \angle BAP = [\text{エ}] - \angle PAC$$

$$\angle CAQ = [\text{オ}] - \angle PAC$$

$$②より、\angle BAP = [\text{カ}] \dots\dots ④$$

③、④より、[キ] から、

$$\triangle ABP \sim \triangle ACQ$$



2 右の図で、 $BD : DC = 2 : 3$ 、 $AE : ED = 5 : 3$ 、 $BF \parallel DG$ である。次の線分の長さの比を求めなさい。(各10点)

(1) $EF : DG$

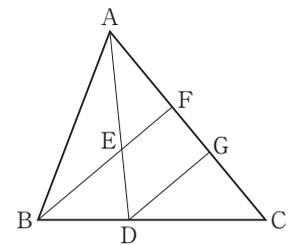
[]

(2) $FG : AC$

[]

(3) $BE : EF$

[]



3 右の図のような、底面の半径と高さがそれぞれ等しい円錐と円柱の容器がある。円錐の容器の深さの $\frac{3}{4}$ まで入っている水を、円柱の容器に全部移すとき、次の問に答えなさい。(各7点)

(1) 水の体積と円錐の容器の容積の比を求めなさい。

[]

(2) 円錐の容器と円柱の容器の容積の比を求めなさい。

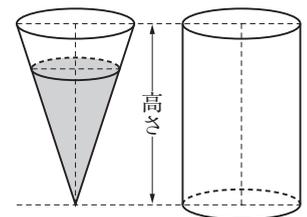
[]

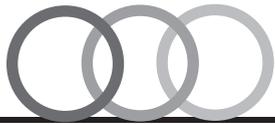
(3) 水の体積と円柱の容器の容積の比を求めなさい。

[]

(4) 円柱の容器に移した水の深さは、円柱の容器の深さの何分のいくつになりますか。

[]





確認ワーク

次の空欄をうめなさい。

1 相似な図形(1)

♂ 18

1つの図形を、形を変えずに一定の割合に拡大、または縮小して得られる図形は、もとの図形と **ア** であるという。

四角形 ABCD と四角形 A'B'C'D' が相似であることを、記号 \sim を使って、次のように表す。

四角形 ABCD **イ** 四角形 A'B'C'D'

相似な図形で、対応する部分の長さの比を **ウ** という。

相似な図形では、 **エ** する部分の長さの比はすべて等しく、対応する角の大きさはそれぞれ **オ** 。

2 相似な図形(2)

♂ 19

〈三角形の相似条件〉

2つの三角形は、次のどれかが成り立つとき相似である。

- ① **ア** 組の **イ** の比がすべて等しい。
- ② 2組の **ウ** の比とその間の **エ** がそれぞれ等しい。
- ③ **オ** 組の角がそれぞれ等しい。

3 平行線と比(1)

♂ 20

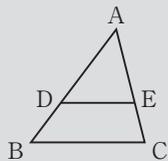
$\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上の点をそれぞれ D, E とするとき、

・ $DE \parallel BC$ ならば、

$$AD : AB = AE : \text{ア} \text{ } \\ = DE : \text{イ} \text{ }$$

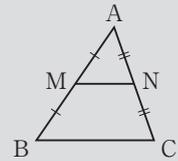
$$AD : DB = AE : \text{ウ} \text{ }$$

・ $AD : AB = AE : AC$ か、 $AD : DB = AE : EC$ ならば、 $DE \parallel \text{エ} \text{ }$



〈中点連結定理〉

$\triangle ABC$ の2辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると、
 $MN \parallel BC$,
 $MN = \frac{1}{2} \text{オ} \text{ }$

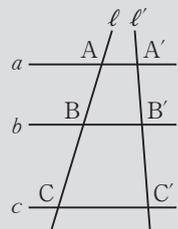


4 平行線と比(2)

♂ 21

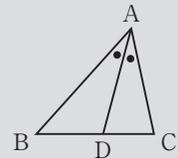
平行な3つの直線 a, b, c が直線 l とそれぞれ A, B, C で交わり、直線 l' とそれぞれ A', B', C' で交われれば、

$$AB : BC \\ = A'B' : \text{ア} \text{ }$$



$\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすれば、

$$AB : AC \\ = BD : \text{イ} \text{ }$$



5 相似な図形の面積と体積(1)

♂ 22

高さが等しい三角形の面積比は、 **ア** の長さの比に等しい。

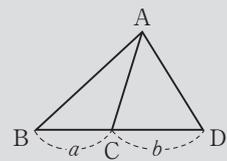
右の図で、

$$\triangle ABC : \triangle ACD = a : \text{イ} \text{ }$$

相似な平面図形では、相似比が $m : n$ ならば、

$$\text{周の長さの比は、} m : \text{ウ} \text{ }$$

$$\text{面積比は、} \text{エ} \text{ } : n^2$$



6 相似な図形の面積と体積(2)

♂ 23

相似な立体では、相似比が $m : n$ ならば、

$$\text{表面積の比は、} m^2 : \text{ア} \text{ }$$

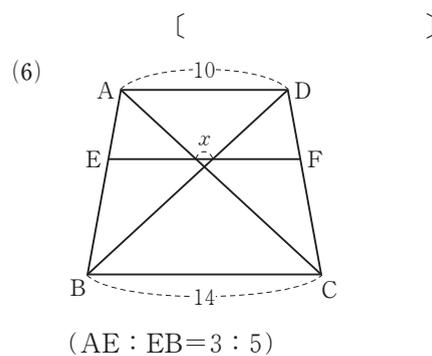
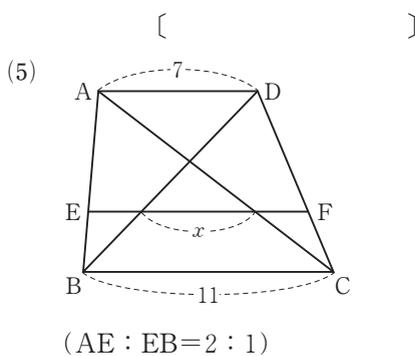
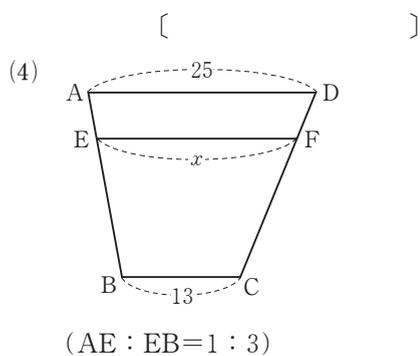
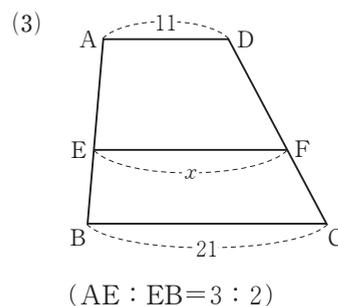
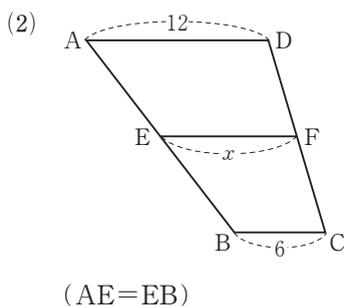
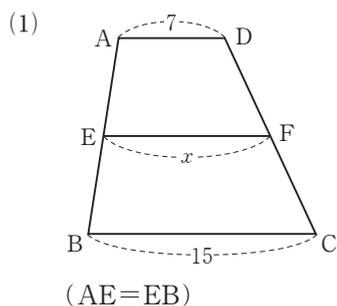
$$\text{体積比は、} \text{イ} \text{ } : n^3$$



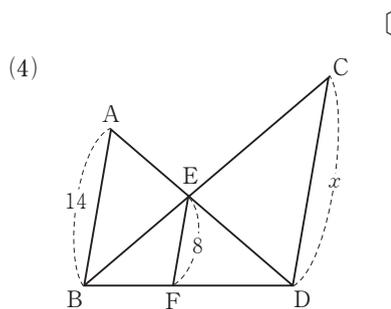
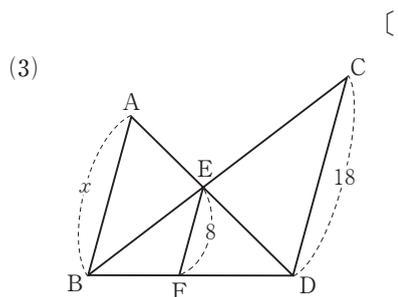
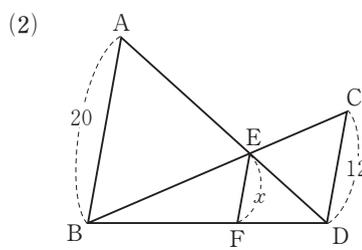
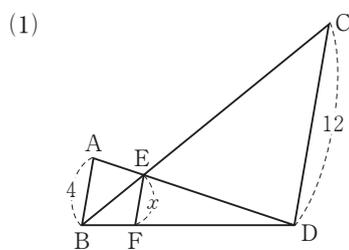
必修ワーク1

● 平行線と比の利用

1 平行線と比の利用① 次のそれぞれの図で、AD, BC, EF が平行のとき、 x の値を求めなさい。



2 平行線と比の利用② 次のそれぞれの図で、AB, CD, EF が平行のとき、 x の値を求めなさい。

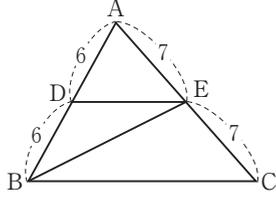




必修ワーク2

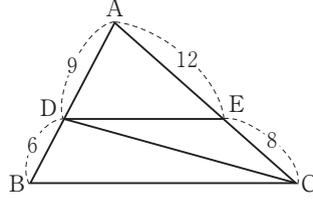
1 底辺の比と面積比 次の図で、指定された2つの三角形の面積比を求めなさい。

(1) $\triangle DBE : \triangle ABC$



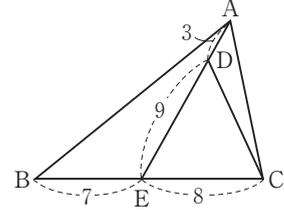
[]

(2) $\triangle CDE : \triangle ABC$



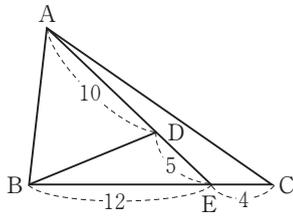
[]

(3) $\triangle CDE : \triangle ABC$



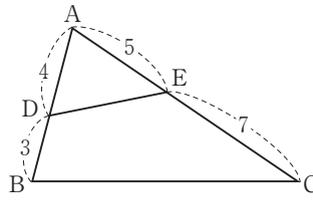
[]

(4) $\triangle ABD : \triangle ABC$



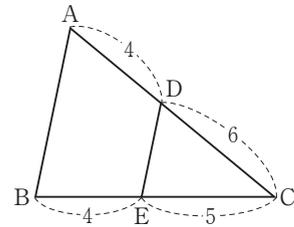
[]

(5) $\triangle ADE : \triangle ABC$



[]

(6) $\triangle DEC : \triangle ABC$



[]

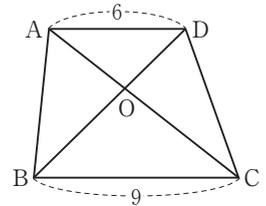
2 相似と面積比① 右の図で、 $AD \parallel BC$ である。次の面積比を求めなさい。

(1) $\triangle BOC : \triangle DOC$

[]

(2) $\triangle BOC : \text{四角形 } ABCD$

[]



3 相似と面積比② 右の四角形 ABCD は平行四辺形で、 $AE : ED = 2 : 1$ である。

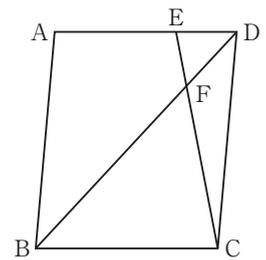
次の面積比を求めなさい。

(1) $\triangle DEF : \triangle DFC$

[]

(2) $\triangle DEF : \text{四角形 } ABCD$

[]



4 相似と面積比③ 右の四角形 ABCD は平行四辺形で、 $BE : EC = 3 : 2$ である。

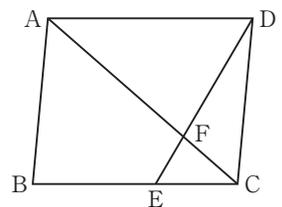
四角形 ABCD の面積が 210cm^2 のとき、次の図形の面積を求めなさい。

(1) $\triangle CEF$

[]

(2) 四角形 ABEF

[]





強化ワーク2

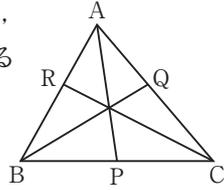
●チェバ・メネラウスの定理

① チェバ・メネラウスの定理

1 チェバの定理

△ABCで、右の図のように、AP, BQ, CRが1点で交わる
とき、

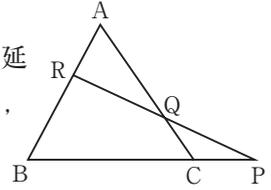
$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$



2 メネラウスの定理

△ABCで、右の図のように、
辺BC, CA, ABまたはその延長が1つの直線と交わる
とき、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

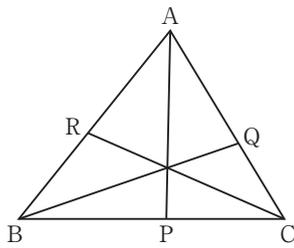


1 次の図で、指定された線分の長さの比を求めなさい。

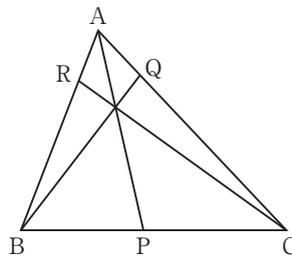
(1) AR : RB

(2) CQ : QA

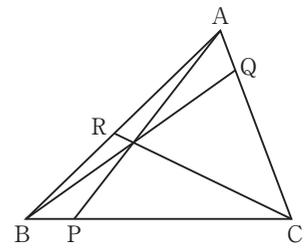
(3) BC : PC



$$\left(\begin{array}{l} BP : PC = 5 : 4 \\ CQ : QA = 2 : 3 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} AR : RB = 1 : 3 \\ BP : PC = 6 : 7 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} AR : RB = 6 : 5 \\ CQ : QA = 15 : 4 \end{array} \right)$$

[]

[]

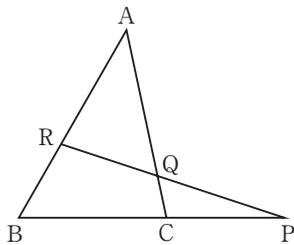
[]

2 次の図で、指定された線分の長さの比を求めなさい。

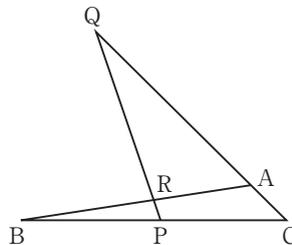
(1) AR : RB

(2) CQ : QA

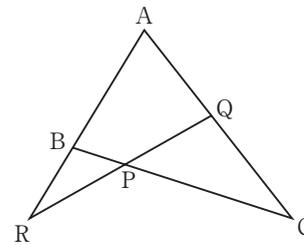
(3) BC : CP



$$\left(\begin{array}{l} BP : PC = 9 : 4 \\ CQ : QA = 2 : 7 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} AR : RB = 3 : 4 \\ BP : PC = 10 : 9 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} AR : RB = 8 : 3 \\ CQ : QA = 6 : 5 \end{array} \right)$$

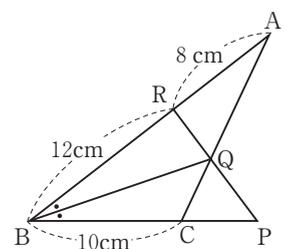
[]

[]

[]

3 右の図の△ABCで、点Qは∠ABCを2等分する直線と辺ACとの交点である。

CPの長さを求めなさい。



[]

