7 数と式，方程式，確率

クラス　番	得点	実施日
氏名	/100点	／

1 次の問いに答えなさい。

(1)　A，Bの２つのグループに対し，数学のテストを実施した。このとき，Aグループ16人の平均点が a 点，Bグループ20人の平均点が b 点であった。全体の平均点を a，b を使った式で表しなさい。

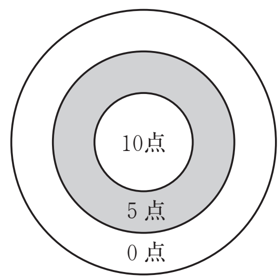
(2)　$x=2014$，$y=2013$ のとき，x^2-y^2 の値を求めなさい。

(3)　大小２つのさいころを同時に投げるとき，大きいさいころの出た目の数を a，小さいさいころの出た目の数を b とする。このとき，$a+b$ の値が４の倍数となる確率を求めなさい。ただし，さいころの目はどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(4)　３つの数 $\sqrt{(-8)^2}$，$3\sqrt{6}$，$\sqrt{12}+\sqrt{27}$ のうち，最も大きい数を a，最も小さい数を b とする。このとき，$(a+b)(a-b)$ の値を求めなさい。

(5)　２次方程式 $x^2-4x+a=0$ の解の１つは -2 であり，もう１つは x の１次方程式 $3x+a+2b=0$ の解になっている。このとき，a，b の値を求めなさい。

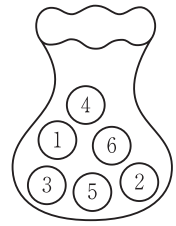
(6)　右の図のような，０点，５点，10点の３種類の点数がある的にボールをあてるゲームをした。ボールは全部で25球投げ，０点に当たった回数は５回，点数の平均は5.4点であった。このとき，10点の場所に当たった回数を求めなさい。



各５点，(5)完答

(1)	点	(2)		(3)			
(4)		(5)	$a=$		$b=$	(6)	回

2 右の図のように，袋の中に 1， 2， 3， 4， 5， 6 の数が 1 つずつ書かれた 6 個の玉が入っている。袋の中から 1 個目の玉を取り出し，それをもどさずに， 2 個目の玉を取り出す。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　1 個目の玉と 2 個目の玉に書かれた数の積が 3 でわり切れる確率を求めなさい。

(2)　1 個目の玉に書かれた数を十の位の数， 2 個目の玉に書かれた数を一の位の数とする 2 桁の自然数を m とし，m の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる 2 桁の自然数を n とする。m と n の和を素因数分解すると， 2 つの異なる素数 p， q を使って，$p\times q$ の形で表される確率を求めなさい。

各 5 点

(1)		(2)	

3 次の先生と生徒の会話文を読んで，あとの問いに答えなさい。

先生：「$7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6+7^7+7^8+7^9+7^{10}$」の一の位の数を求めてみましょう。

生徒：$7^2=49$ だから，7^2 の一の位の数は 9，$7^3=343$ だから，7^3 の一の位の数は 3 になります。
7^4 は $7\times7\times7\times7$ ですが，このあたりから計算が大変です。

先生：調べたいのは一の位の数だけですから，すべての位を計算する必要はないですよ。7^3 の一の位の数は 3 だから，$3\times7=21$ で，7^4 の一の位の数は［ア］です。では，7^5 の一の位の数はどうなりますか。

生徒：同じように考えれば，7^5 の一の位の数は［イ］になります。

先生：そうですね。7^5 まで調べた結果から，7^n の一の位の数は，［ウ］の 4 つの数が規則的に並ぶことが予測できますね。このことを利用して，「$7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6+7^7+7^8+7^9+7^{10}$」の一の位の数を求めましょう。

(1)　**ア**～**ウ**にあてはまる数を書きなさい。

(2)　7^{10}の一の位の数を求めなさい。

(3)　$7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6+7^7+7^8+7^9+7^{10}$ の一の位の数を求めなさい。

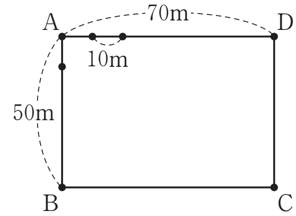
各 4 点，(1)ウ完答

(1)	ア		イ		ウ		
(2)		(3)					

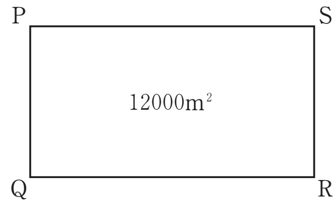
うらへつづく

4 次の問いに答えなさい。

⑴　右の図のような縦 50m，横 70m の長方形の土地 ABCD がある。この土地の周囲に桜の木を 10m おきに植えることにした。頂点A，B，C，Dにはかならず植えるものとするとき，合計何本の木が必要か，求めなさい。



⑵　右の図のような面積が 12000m^2 の長方形の土地 PQRS がある。⑴と同様にして，この土地の周囲に桜の木を 10m おきに植えることにした。頂点Pから頂点Sまでに植えた桜の木の本数は，頂点Pから頂点Qまでに植えた桜の木の本数より 7 本多かった。このとき，頂点Pから頂点Qまでに植えた桜の木の本数を求めなさい。また，求める過程も書きなさい。



⑴5 点，⑵10点，⑵完答

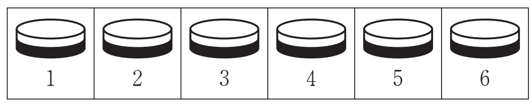
⑴	本	⑵	［求める過程］ 答　　　　　　本

5 表面が白色，裏面が黒色のコマが 6 個ある。右の図のように，1 から 6 までの数が 1 つずつ書かれた 6 マスのマス目に，すべて白い面が上になるようにコマを 1 個ずつ置く。この状態から，1 から 6 までの目がある大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げて，右の（手順 1 ），（手順 2 ）を順に 1 回ずつ行う。

例えば，大きいさいころの出た目の数が 3，小さいさいころの出た目の数が 5 であるとき，コマの上の面の色は左から，

（手順 1 ）●○●○○○　　（手順 2 ）●○●○●○

のように変化する。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，さいころの目はどの目が出ることも同様に確からしいものとする。



（手順 1 ）　大きいさいころの出た目の数の**約数**が書かれたマス目に置いてあるコマを，すべて裏返して黒い面が上になるように置きかえる。

（手順 2 ）　（手順 1 ）の操作後の状態から，小さいさいころの出た目の数が書かれたマス目に置いてあるコマを裏返す。

⑴　大きいさいころの出た目の数が 4 ，小さいさいころの出た目の数が 2 であるとき，黒い面が上になっているコマの個数を求めなさい。

⑵　6 マスのマス目に置いてあるコマのうち，黒い面が上になっているコマが 3 個となる確率を求めなさい。

各 5 点

⑴	個	⑵	

6 山田さんは，連続する3つの奇数の和の平方根が整数となる場合を見つけるため，次のような方法を考えた。

〈山田さんの考えた方法〉

n を整数とすると，連続する3つの奇数は，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$ と表される。
この3つの奇数の和は，

$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=6n+3=3(2n+1)$

となる。
この3つの奇数の和の平方根 $\sqrt{3(2n+1)}$ が整数となるから，

$3(2n+1)=3^2\times(\text{自然数})^2$……①

と表される。
さらに，$2n+1$ は奇数だから，①の左辺は奇数となる。
よって，右辺の(自然数)は奇数となり，これを小さい数から順に考える。

$3(2n+1)=3^2\times1^2$　これを解くと，$n=1$ だから，3つの奇数は1，3，5となる。

$3(2n+1)=3^2\times3^2$　これを解くと，$n=13$ だから，3つの奇数は25，27，29となる。

$3(2n+1)=3^2\times5^2$　これを解くと，$n=\boxed{\text{ア}}$ だから，3つの奇数は小さい順に$\boxed{\quad\text{イ}\quad}$となる。

下の問いに答えなさい。

(1)　**ア**にあてはまる数を求めなさい。

(2)　**イ**にあてはまる3つの奇数を求めなさい。

(3)　$\sqrt{1+3+5+7+9}=\sqrt{25}=5$ のように，連続する5つの奇数の和の平方根も整数となる場合がある。1，3，5，7，9以外で最も小さい連続する5つの奇数を求めなさい。

各5点，(2)，(3)完答

(1)		(2)				(3)					

7　数と式，方程式，確率　■解答と解説

解答

1　(1)　$\dfrac{4a+5b}{9}$(点)　(2)　4027　(3)　$\dfrac{1}{4}$　(4)　21　(5)　($a=$)-12，($b=$)-3　(6)　7(回)

2　(1)　$\dfrac{3}{5}$　(2)　$\dfrac{2}{5}$

3　(1)　ア…1，イ…7，ウ…7，9，3，1　(2)　9　(3)　6

4　(1)　24(本)

(2)　［求める過程］　頂点Ｐから頂点Ｑまでに植えた木の本数を x 本とする。

頂点Ｐから頂点Ｑまでの，木と木の間の数は $x-1$(か所)だから，

$\mathrm{PQ}=10\times(x-1)=10(x-1)$(m)

頂点Ｐから頂点Ｓまでの，木と木の間の数は，$(x+7)-1=x+6$(か所)だから，

$\mathrm{PS}=10\times(x+6)=10(x+6)$(m)

長方形 PQRS の面積について，$10(x-1)\times10(x+6)=12000$，$x^2+5x-6=120$，

$x^2+5x-126=0$，$(x-9)(x+14)=0$，$x=9$，-14

x は 2 以上の自然数だから，$x=-14$ は問題に適さない。

$x=9$ は，問題に適している。

［答］　9(本)

5　(1)　2(個)　(2)　$\dfrac{4}{9}$

6　(1)　37　(2)　73，75，77　(3)　41，43，45，47，49

配点

1　各５点×６＝30点

2　各５点×２＝10点

3　(1)各４点×３＝12点

他各４点×2＝８点

計20点

4　(1)　５点

(2)　10点

5　各５点×２＝10点

6　各５点×３＝15点

―採点基準―　**1**　(5)，**4**　(2)，**6**　(2)，(3)　完答。　**3**　(1)ウ　完答(順不同)

4　(2)　・求める過程で，方程式が正しく記述されていて 3 点(同値な方程式なら可とする)。

・求める過程で，方程式の 2 つの解が正しく求められていて 3 点。

・答えが正しく記述されていて 4 点。

解説

1　〈平均，式の値，確率，平方根，方程式の解，連立方程式の利用〉

(1)　Ａ，Ｂグループを合わせた合計点を，Ａ，Ｂグループを合わせた人数でわる。合計点は，$a\times16+b\times20=16a+20b$(点)，人数は，$16+20=36$(人)だから，全体の平均点は，$\dfrac{16a+20b}{36}=\dfrac{4(4a+5b)}{36}=\dfrac{4a+5b}{9}$(点)。

(2)　先に因数分解してから，文字に数を代入する。$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(2014+2013)\times(2014-2013)=4027\times1=4027$。

(3)　すべての目の出方は，$6\times6=36$(通り)。

●$a+b=4$ となるような(a，b)の値の組は，(1，3)，(2，2)，(3，1)の 3 通り。

●$a+b=8$ となるような(a，b)の値の組は，(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2)の 5 通り。

●$a+b=12$ となるような(a，b)の値の組は，(6，6)の 1 通り。

よって，求める確率は，$\dfrac{3+5+1}{36}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$。

(4)　$\sqrt{(-8)^2}=\sqrt{64}$，$3\sqrt{6}=\sqrt{54}$，$\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}=\sqrt{75}$ で，$54<64<75$ だから，$a=\sqrt{75}$，$b=\sqrt{54}$。

このとき，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2=(\sqrt{75})^2-(\sqrt{54})^2=75-54=21$。

(5)　$x=-2$ を $x^2-4x+a=0$ に代入すると，$(-2)^2-4\times(-2)+a=0$，$4+8+a=0$，$a=-12$。これを $x^2-4x+a=0$ に代入すると，$x^2-4x-12=0$，$(x+2)(x-6)=0$。よって，もう 1 つの解は，$x=6$。$x=6$，$a=-12$ を $3x+a+2b=0$ に代入すると，$3\times6-12+2b=0$，$2b=-6$，$b=-3$。

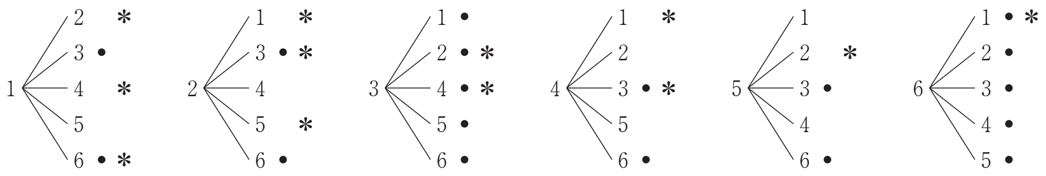
(6)　10点に x 回，5 点に y 回当たったとする。

$x+y=25-5$ より，$x+y=20$…①，$\dfrac{10x+5y+0\times5}{25}=5.4$ より，$2x+y=27$…②。

①，②より，$x=7$，$y=13$。

2　〈玉と確率〉

玉の取り出し方を樹形図に表すと，下の図のように，6×5＝30(通り)ある。



(1)　１個目の玉と２個目の玉に書かれた数の積が３でわり切れるのは，上の図で•印をつけた18通りある。

◆(2)　１個目の玉に書かれた数を a，２個目の玉に書かれた数を b とすると，$m=10a+b$，$n=10b+a$ と表されるから，$m+n=(10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11(a+b)$。$a+b$ の値は，(1＋2＝)3 以上，(5＋6＝)11 以下である。$m+n$ が２つの異なる素数 p，q を使って，$p\times q$ の形で表されるのは，$a+b$が11以外の素数，つまり，３，５，７になるときだから，上の図で＊印をつけた12通りある。よって，求める確率は，$\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$。

3　〈規則性の問題〉

(1)　**ア**…一の位のみに着目し，数を取り出していく。7^3 は343だから，7^4 の一の位の数は，3×7＝21 で，21の一の位の１になる。

イ…**ア**と同様に考えると，7^5 の一の位の数は 1×7 で，7 になる。

ウ…7^1～7^5 までの，一の位の数は順に「７，９，３，１，７」。よって，7^n の一の位は，７，９，３，１がこの順に並ぶことになる。

(2)　(1)より，7^n の一の位の数は n を４でわったときの余りが　・１のとき→７　・２のとき→９　・３のとき→３　・０のとき→１　となる。よって，10÷4＝2 余り 2 より，7^{10}の一の位の数は，９になる。

(3)　7^1～7^{10} までの一の位の数の和は，7＋9＋3＋1＋7＋9＋3＋1＋7＋9。ここで，７，９，３，１を一組とすると，その和は20だから，一の位の数は０。よって，一の位の数のみに着目すると，(7＋9＋3＋1)＋(7＋9＋3＋1)＋(7＋9)→0＋0＋6→６　となる。

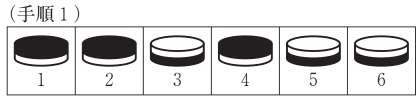
4　〈面積についての問題〉

(1)　長方形の周上でとなり合う２本の木の間の距離はどこも 10m だから，必要な木の本数は，{(50＋70)×2}÷10＝24(本)。

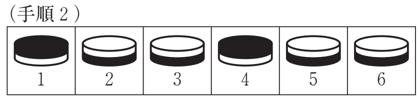
5　〈さいころと確率〉

(1)　まず，(手順１)により，大きいさいころの出た目の数４の約数１，２，４のマス目に置かれたコマが裏返される。次に，(手順２)により，小さいさいころの出た目の数２のマス目に置かれたコマがもう一度裏返される。結果，黒い面が上になっているコマは，右の図のように１，４のマス目に置かれた２個となる。

(手順１)



(手順２)



(2)　さいころの出た目の数を大→ a，小→ b とする。(手順１)，(手順２)を行った結果，黒い面が上になっているコマが３個になるのは，

・(手順１)で４個のコマを裏返し，(手順２)で(手順１)で裏返したコマのうちの１枚をもう一度裏返す場合。
　このとき，a の約数は４個，b は a の約数となる。

・(手順１)で２個のコマを裏返し，(手順２)で(手順１)で裏返したコマとは別のマスのコマを，１枚裏返す場合。
　このとき，a の約数の数は２個，b は a の約数とは異なる数となる。

１～６の整数のうち，約数が４個の整数は６。よって，$a=6$，b が６の約数となるような(a，b)の値の組は，(6，1)，(6，2)，(6，3)，(6，6)の４通り。

また，１～６の整数のうち，約数が２個の整数は２，３，５。$a=2, 3, 5$ で，b が a の約数とは異なる数となる(a，b)の値の組は，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(2，6)，(3，2)，(3，4)，(3，5)，(3，6)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，6)の12通り。

大小２つのさいころの目の出方は，全部で，6×6＝36(通り)だから，求める確率は，$\frac{4+12}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$。

6　〈連続する奇数の和の性質〉

(1)　$3(2n+1)=3^2\times5^2$，$2n+1=3\times5^2=75$，$n=37$

(2)　真ん中の奇数は，$2n+1=75$ だから，最も小さい奇数は，75－2＝73，最も大きい奇数は，75＋2＝77。

(3)　n を整数とすると，連続する５つの奇数は，$2n-3$，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$ と表される。

この５つの奇数の和は，$(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=10n+5=5(2n+1)$ となる。

この５つの奇数の和の平方根の絶対値 $\sqrt{5(2n+1)}$ が整数となるから，$5(2n+1)=5^2\times$(自然数)^2 と表される。

この式の左辺は奇数となるから，右辺の(自然数)は奇数となる。これを小さい数から順に考える。

$5(2n+1)=5^2\times1^2$ を解くと，$2n+1=5\times1^2$，$n=2$ だから，５つの奇数は，１，３，５，７，９。

$5(2n+1)=5^2\times3^2$ を解くと，$2n+1=5\times3^2$，$n=22$ だから，５つの奇数は，41，43，45，47，49。