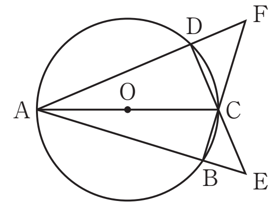
7 図形の証明

出題パターン

1 右の図のように，円Oの周上に４点A，B，C，Dがあり，線分 AC は円Oの直径である。２直線 AB，DC の交点をE，２直線 AD，BC の交点をFとし，三角形 AEDと三角形 CFD が相似であることを証明した。下の証明を完成させるために，[(i)]に適する式を書き，[(ii)]に適することがらを書きなさい。



［証明］ △AED と△CFD において，
まず，半円の弧に対する円周角だから，
∠ABC＝∠ADC＝90°
よって，[(i)]＝90° ……①
２点B，Dは直線 EF について同じ側にあって，
①が成り立つことから，
[(ii)]といえる。

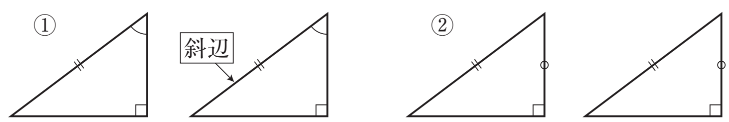
このとき，$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ に対する円周角は等しいから，
∠BED＝∠BFD
よって，∠AED＝∠CFD ……②
また，∠ADE＝∠CDF＝90° ……③
②，③より，２組の角がそれぞれ等しいから，
△AED∽△CFD

(i)〔　　　　〕 (ii)〔　　　　〕

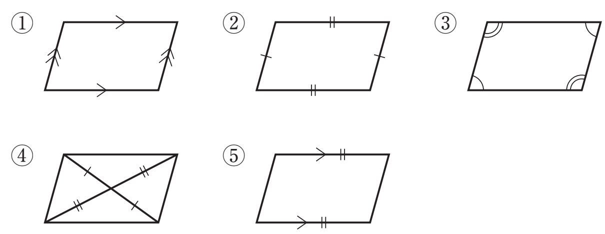
ポイント 証明問題を含む平面図形の大設問が毎年出題されている。近年は，図形の証明を読み，適する語や式を答える問題と図形の計量問題が出題されている。図形の計量問題では，証明で用いた図形の性質を使うことが多いため，わからない場合はもう一度証明を読み返してみよう。

➡ 三角形の合同条件
①３組の辺がそれぞれ等しい。
②２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。
③１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

➡ 直角三角形の合同条件
①斜辺と１つの鋭角がそれぞれ等しい。
②斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい。



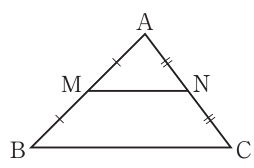
➡ 平行四辺形になるための条件
①２組の対辺がそれぞれ平行である。（定義）
②２組の対辺がそれぞれ等しい。
③２組の対角がそれぞれ等しい。
④対角線がそれぞれの中点で交わる。
⑤１組の対辺が平行でその長さが等しい。



➡ 三角形の相似条件
①３組の辺の比がすべて等しい。
②２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。
③２組の角がそれぞれ等しい。

➡ 中点連結定理
右の図で，AM＝MB，AN＝NC のとき，

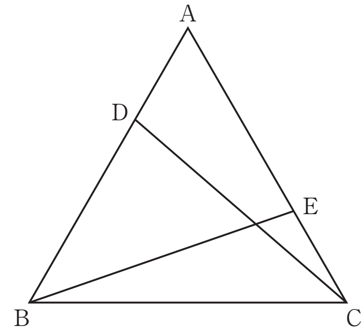
$$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BC},\ \mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$$



練　習　問　題

～三角形の合同条件を使った証明～

1　右の図のような正三角形 ABC があり，辺 AB 上に点D，辺 AC 上に点Eを AD＝CE となるようにとる。また，点Bと点E，点Cと点Dをそれぞれ結び，DC＝EB となることを証明した。下の証明を完成させるために，(i)に適する式を書き，(ii)に適する根拠となることがらを書きなさい。



［証明］　△ADC と△CEB において，

まず，正三角形の３つの角は60°で等しく，３辺も等しいから，

$\angle CAD = \angle BCE = 60°$　……①

(i)　……②

次に，仮定から，AD＝CE　……③

①，②，③より，(ii)から，

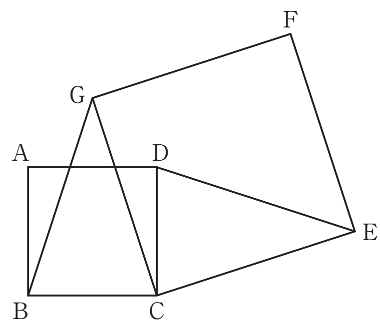
△ADC≡△CEB

合同な図形の対応する辺は等しいから，

DC＝EB

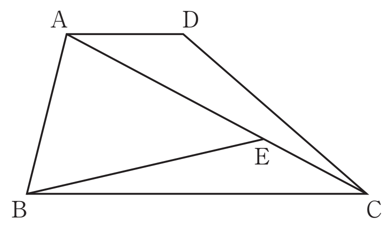
(i)〔　　　　〕 (ii)〔　　　　〕

2　右の図のような正方形 ABCD と正方形 CEFG があり，頂点Cを共有して，図形の一部が重なった状態にある。このとき，三角形 BCG と三角形 DCE が合同であることを証明しなさい。



〔　　　　〕

3　右の図は，AD∥BC の台形 ABCD で，$\angle CAB = \angle CBA$ である。対角線 AC上に $\angle ACD = \angle CBE$ となるように点Eをとるとき，CD＝BE であることを証明しなさい。

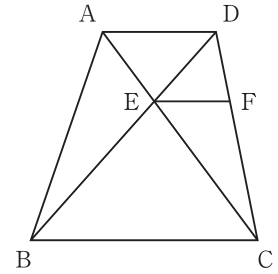


〔　　　　〕

9 ① 出題パターン別対策問題 ～線分の比⑴～

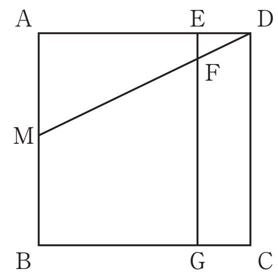
「小問集合」対策…三角形や四角形の中に引かれた線分の比を，相似を利用して求める問題です。

1 右の図のような，AD∥BC の台形 ABCD があり，点Ｅは対角線の交点，点Ｆは辺 CD 上の点で，EF∥AD である。AD＝3 cm，BC＝6 cm のとき，線分 EF の長さを求めなさい。



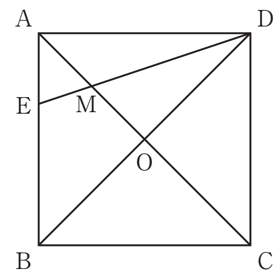
〔　　　　　　〕

2 右の図の正方形 ABCD で，点Ｍは辺 AB の中点，点Ｅは辺 AD 上にあり，AE：ED＝3：1 である。点Ｅを通り辺 AB に平行な直線を引き，線分 DM，辺 BC との交点をそれぞれＦ，Ｇとするとき，線分 EF と線分 FG の長さの比を**最も簡単な整数の比**で表しなさい。



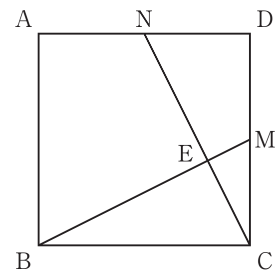
〔　　　　　　〕

3 右の図の正方形 ABCD で，点Ｏは対角線の交点，点Ｍは線分 AO の中点で，点Ｅは辺 AB と直線 DM の交点である。このとき，線分 AE と線分 EB の長さの比を**最も簡単な整数の比**で表しなさい。



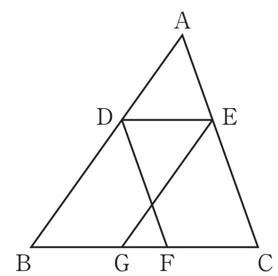
〔　　　　　　〕

4 右の図の正方形 ABCD で，点Ｍ，Ｎはそれぞれ辺 CD，AD の中点で，点Ｅは線分 BM と線分 CN の交点である。このとき，線分 BE と線分 EM の長さの比を**最も簡単な整数の比**で表しなさい。



〔　　　　　　〕

5 右の図の △ABC で，点Ｄ，Ｅはそれぞれ辺 AB，AC 上にあり，DE∥BC である。また，点Ｆ，Ｇはともに辺 BC 上にあり，DF∥AC，EG∥AB である。BC＝10cm，AD：DB＝2：3 のとき，次の問いに答えなさい。



㈠ 線分 AE と線分 EC の長さの比を**最も簡単な整数の比**で表しなさい。

〔　　　　　　〕

㈡ 線分 BG の長さを求めなさい。

〔　　　　　　〕

㈢ 線分 CF の長さを求めなさい。

〔　　　　　　〕

㈣ 線分 BC と線分 GF の長さの比を**最も簡単な整数の比**で表しなさい。

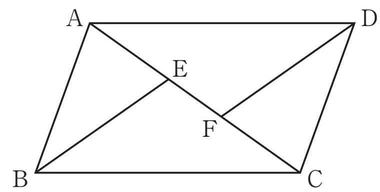
〔　　　　　　〕

応用　小問集合対策問題　第1回

1　次の問いに答えなさい。

(ア)　右の図において，四角形 ABCD は平行四辺形である。∠ABC の二等分線と線分 AC との交点をE，∠CDA の二等分線と線分 AC との交点をFとする。

　AB＝3 cm，BC＝5 cm のとき，線分 AE と線分 EF と線分 FC の長さの比を**最も簡単な整数の比**で表しなさい。



〔　　　　　　〕

(イ)　a L のペンキを使ってかべをぬることにした。1日目には全体の$\frac{1}{2}$を使い，2日目には1日目の残りの$\frac{1}{3}$を使い，3日目には2日目の残りの$\frac{1}{4}$を使うことにすると，3日目が終わったあとに残るペンキの量は何Lになるか a を使った式で表しなさい。

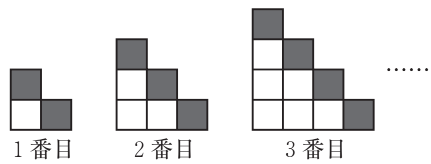
〔　　　　　　〕

応用　小問集合対策問題　第2回

1　次の問いに答えなさい。

(ア)　同じ大きさの正方形の白いタイルと黒いタイルがある。これらのタイルを使って，右の図のように，それぞれ重ならないように，すき間なく規則的に並べ，1番目，2番目，3番目，…と図形をつくっていく。

　このとき，使われた白いタイルの枚数と黒いタイルの枚数の差が77枚になるのは，何番目の図形か求めなさい。



〔　　　　　　〕

(イ)　1本 x 円の鉛筆8本と1冊 y 円のノート7冊を買おうとしたが，1000円ではたりなかった。このときの数量の関係を不等式で表しなさい。

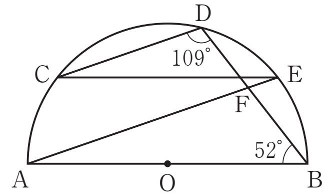
〔　　　　　　　　　〕

応用　小問集合対策問題　第3回

1　次の問いに答えなさい。

(ア)　右の図のように，線分 AB を直径とする半円Oの $\overset{\frown}{AB}$ 上に3点C，D，Eがあり，CE∥AB である。また，線分 AE と線分 BD との交点をFとする。

　∠ABD＝52°，∠CDB＝109°のとき，∠AFD の大きさを求めなさい。



〔　　　　　　〕

(イ)　クラスの生徒10人の母親の年齢を調べたところ，次の資料のようになった。次の日，欠席していた生徒2人についても調べ，資料に追加したところ，追加する前と後で，資料の平均値，中央値，最頻値，範囲はどれも変わらなかった。追加した2つの値を求めなさい。

45	43	48	46	43	44	45	43	46	47	（歳）

〔　　　　　　〕