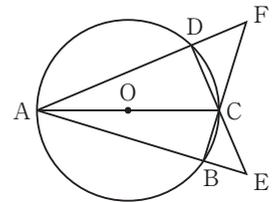


7

図形の証明

出題パターン

1 右の図のように、円Oの周上に4点A, B, C, Dがあり、線分ACは円Oの直径である。2直線AB, DCの交点をE, 2直線AD, BCの交点をFとし、三角形AEDと三角形CFDが相似であることを証明した。この証明を完成させるために、
 (i), (ii) に適する式や言葉を書きなさい。



[証明] $\triangle AED$ と $\triangle CFD$ において、
 まず、 $\angle ABC$, $\angle ADC$ は線分 AC を直径とする半円の弧に対する円周角であるから、
 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$
 よって、(i) $\quad \quad \quad = 90^\circ$ ……①
 2点B, Dは直線EFについて同じ側にあつて、
 ①が成り立つことから、
 (ii) $\quad \quad \quad$ といえる。

このとき、 \widehat{BD} に対する円周角は等しいから、
 $\angle BED = \angle BFD$
 よって、 $\angle AED = \angle CFD$ ……②
 また、 $\angle ADE = \angle CDF = 90^\circ$ ……③
 ②, ③より、2組の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle AED \sim \triangle CFD$

(i) [$\quad \quad \quad$]
 (ii) [$\quad \quad \quad$]

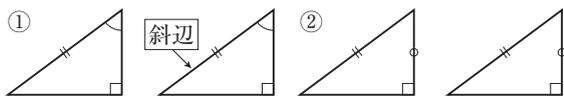
ポイント 図形の証明の穴うめ問題である。入試では、合同の証明や相似の証明のどちらもよく出題される。特に円の性質を利用する問題が多いので、円周角の定理などはしっかりマスターしよう。図形の計量問題では、証明で用いた図形の性質を使うことが多いため、わからない場合はもう一度証明を読み返すとよい。

➡ 三角形の合同条件

- ① 3組の辺がそれぞれ等しい。
- ② 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。
- ③ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

➡ 直角三角形の合同条件

- ① 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。
- ② 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。



➡ 平行四辺形になるための条件

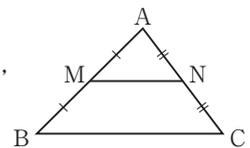
- ① 2組の対辺がそれぞれ平行である。(定義)
- ② 2組の対辺がそれぞれ等しい。
- ③ 2組の対角がそれぞれ等しい。
- ④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。
- ⑤ 1組の対辺が平行でその長さが等しい。

➡ 三角形の相似条件

- ① 3組の辺の比がすべて等しい。
- ② 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。
- ③ 2組の角がそれぞれ等しい。

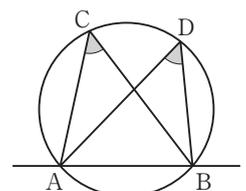
➡ 中点連結定理

$AM = MB$, $AN = NC$ のとき、
 $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$



➡ 円周角の定理の逆

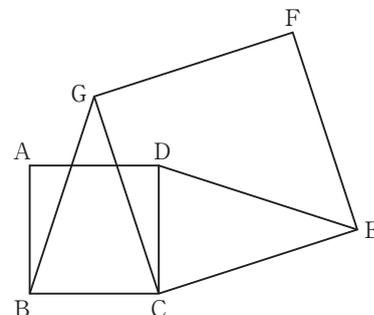
2点C, Dが直線ABについて同じ側にあり、 $\angle ACB = \angle ADB$ ならば、4点A, B, C, Dは1つの円周上にある。



練習問題

～合同条件を使った証明～

1 右の図のような正方形 ABCD と正方形 CEFG があり、頂点 C を共有して、図形の一部が重なった状態にある。このとき、三角形 BCG と三角形 DCE が合同であることを次のように証明した。この証明を完成させるために、 (i) ～ (iii) に適する式や言葉を書きなさい。



[証明] $\triangle BCG$ と $\triangle DCE$ において、

まず、四角形 ABCD, CEFG は正方形であるから、

$$BC = DC \quad \dots\dots ①$$

$$\text{ (i) \quad \dots\dots ②}$$

次に、正方形の 1 つの角は 90° であるから、

$$\angle BCG = 90^\circ - \angle GCD$$

$$\angle DCE = 90^\circ - \angle GCD$$

$$\text{よって、 (ii) \quad \dots\dots ③}$$

①, ②, ③より、 (iii) から、

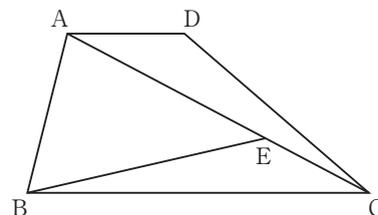
$$\triangle BCG \equiv \triangle DCE$$

(i) []

(ii) []

(iii) []

2 右の図は、 $AD \parallel BC$ の台形 ABCD で、 $\angle CAB = \angle CBA$ である。台形 ABCD の対角線 AC 上に $\angle ACD = \angle CBE$ となるように点 E をとるとき、 $CD = BE$ であることを次のように証明した。この証明を完成させるために、 (i) ～ (iii) に適する式や言葉を書きなさい。



[証明] $\triangle ACD$ と $\triangle CBE$ において、

$$\text{まず、仮定より、} \angle ACD = \angle CBE \quad \dots\dots ①$$

また、 $\angle CAB = \angle CBA$ より、2 つの角が等しいから、 $\triangle CAB$ は二等辺三角形である。

$$\text{よって、 (i) \quad \dots\dots ②}$$

次に、 $AD \parallel BC$ より、平行線の錯角は等しいから、

$$\text{ (ii) \quad \dots\dots ③}$$

①, ②, ③より、 (iii) から、

$$\triangle ACD \equiv \triangle CBE$$

合同な図形の対応する辺の長さは等しいから、

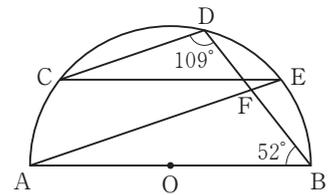
$$CD = BE$$

(i) []

(ii) []

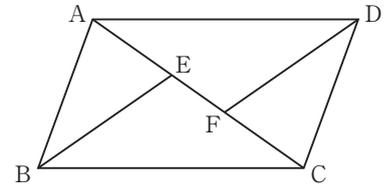
(iii) []

- 1 右の図のように、線分 AB を直径とする半円 O の \widehat{AB} 上に 3 点 C, D, E があり、 $CE \parallel AB$ である。また、線分 AE と線分 BD との交点を F とする。 $\angle ABD = 52^\circ$, $\angle CDB = 109^\circ$ のとき、 $\angle AFD$ の大きさを求めなさい。



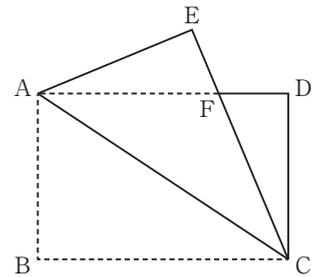
[]

- 2 右の図において、四角形 ABCD は平行四辺形である。 $\angle ABC$ の二等分線と線分 AC との交点を E, $\angle CDA$ の二等分線と線分 AC との交点を F とする。
 $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ のとき、線分 AE と線分 EF と線分 FC の長さの比を最も簡単な整数の比で表しなさい。



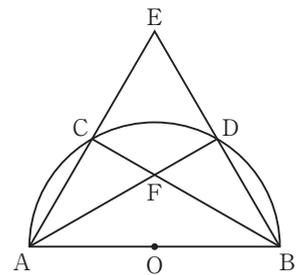
[]

- 3 右の図は、長方形 ABCD を対角線 AC を折り目として折り返したものである。頂点 B が移った点を E とし、線分 AD と線分 EC との交点を F とする。
 $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ のとき、線分 DF の長さを求めなさい。



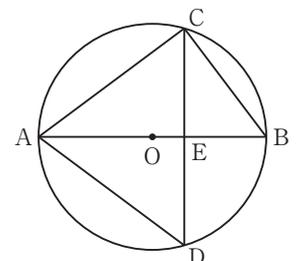
[]

- 4 右の図のように、線分 AB を直径とする半円 O の \widehat{AB} 上に、2 点 C, D を $\widehat{CD} = \widehat{BD}$ となるようにとり、線分 AC の延長と線分 BD の延長との交点を E, 線分 AD と線分 BC との交点を F とする。
 $\angle DAB = 30^\circ$, $CF = a$ としたとき、四角形 CFDE の面積を a を使った式で表しなさい。



[]

- 5 右の図において、線分 AB は円 O の直径であり、2 点 C, D は円 O の周上の点である。また、 $AB \perp CD$ であり、線分 AB と線分 CD との交点を E とする。
 $AC = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ のとき、線分 DE の長さを求めなさい。



[]