第 3 講座　関数 $y=ax^2$

要点のまとめ

1　**2乗に比例する関数の求め方**　y が x の 2 乗に比例するときは $y=ax^2$ とおき，対応する x，y の値を代入して，比例定数 a の値を求める。

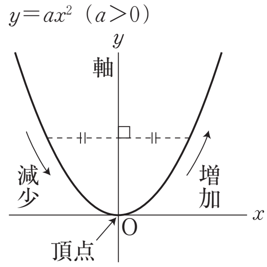
2　**変化の割合**　$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ で求める。関数 $y=ax^2$ では，変化の割合は一定ではない。

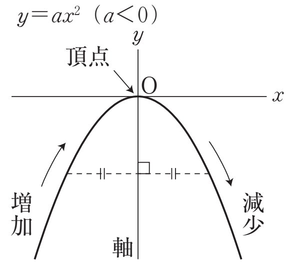
3　**関数 $y=ax^2$ のグラフ**　（放物線 $y=ax^2$ ともいう。）

①原点を通る曲線で，y 軸について対称である。

②$a>0$ のとき…グラフは x 軸の上側にあり，上に開いている。

$a<0$ のとき…グラフは x 軸の下側にあり，下に開いている。





チェック1　2乗に比例する関数

y は x の 2 乗に比例し，$x=4$ のとき $y=12$ である。このとき，y を x の式で表しなさい。

解　$y=ax^2$ に $x=4$，$y=12$ を代入すると，$12=a\times4^2$，$a=\dfrac{3}{4}$

答　$y=\dfrac{3}{4}x^2$

1　y は x の 2 乗に比例し，$x=-9$ のとき $y=27$ である。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表しなさい。

〔　　　　〕

(2)　$x=6$ のときの y の値を求めなさい。

〔　　　　〕

チェック2　変化の割合

関数 $y=3x^2$ で，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

解　$x=1$ のとき $y=3\times1^2=3$，$x=4$ のとき $y=3\times4^2=48$

よって，$(\text{変化の割合})=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{48-3}{4-1}=\dfrac{45}{3}=15$

答　15

特別な公式

関数 $y=ax^2$ で，x の値が m から n まで増加したときの変化の割合は $a(m+n)$ で求めることができる。

2　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ で，x の値が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

〔　　　　〕

(2)　関数 $y=ax^2$ で，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合が -21 であるとき，a の値を求めなさい。

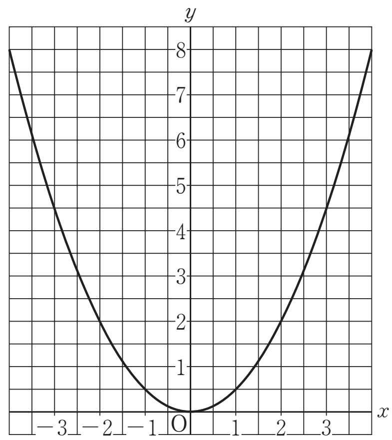
〔　　　　〕

チェック 3　$y=ax^2$ のグラフと変域

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　この関数のグラフをかきなさい。

(2)　x の変域を $-4 \leqq x \leqq 2$ とするとき，y の変域を求めなさい。



解　(1)　$x=-4$，-2，0，2，4 などに対応する y の値を求め，x と y の値の組を座標とする点をとり，それらをなめらかな曲線で結ぶ。

(2)　$x=-4$ のとき $y=8$，$x=2$ のとき $y=2$ だが，右の図より，y の最小値は原点を通るときで，$x=0$ のときの $y=0$

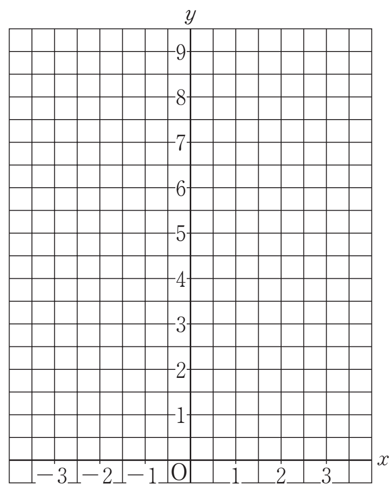
よって，$0 \leqq y \leqq 8$ となる。

答　(1)　右の図　　(2)　$0 \leqq y \leqq 8$

3

関数 $y=x^2$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　この関数のグラフをかきなさい。



(2)　x の変域が，次のときの y の変域を求めなさい。

①　$-1 \leqq x \leqq 2$

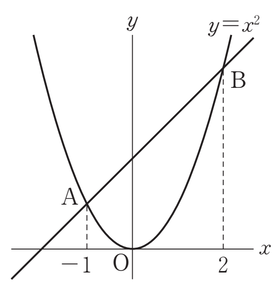
〔　　　　　　　　〕

②　$-3 \leqq x \leqq -1$

〔　　　　　　　　〕

チェック 4　放物線と直線

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点A，Bがあり，2 点A，Bの x 座標はそれぞれ -1，2 である。直線 AB の式を求めなさい。



解　点Aの y 座標は，$y=(-1)^2=1$ だから，A$(-1,\ 1)$

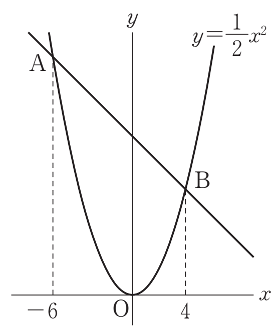
点Bの y 座標は，$y=2^2=4$ だから，B$(2,\ 4)$

求める直線の式を $y=ax+b$ として，A，Bの x 座標，y 座標をそれぞれ代入すると，$\begin{cases} 1=-a+b \\ 4=2a+b \end{cases}$　よって，$a=1$，$b=2$

答　$y=x+2$

4

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点A，Bがあり，2 点A，Bの x 座標はそれぞれ -6，4 である。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　2 点A，Bの座標を求めなさい。

A〔　　　　　〕　B〔　　　　　〕

(2)　直線 AB の式を求めなさい。

〔　　　　　　　　〕

練習問題

1 2乗に比例する関数 次の問いに答えなさい。

(1) y は x の 2 乗に比例し，$x=-4$ のとき $y=24$ である。

① y を x の式で表しなさい。 〔　　　〕

② $x=6$ のときの y の値を求めなさい。 〔　　　〕

(2) 関数 $y=ax^2$ のグラフは点$(6,\ -12)$を通る。

① a の値を求めなさい。

〔　　　〕

② 点$(-9,\ \boxed{})$は，この関数のグラフ上にある。$\boxed{}$にあてはまる数を求めなさい。

〔　　　〕

2 変化の割合 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=-2x^2$ で，x の値が -5 から -1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

〔　　　〕

(2) 関数 $y=ax^2$ で，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合は20である。a の値を求めなさい。

〔　　　〕

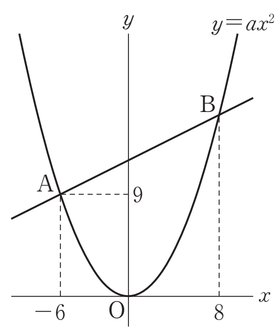
3 変域 関数 $y=-x^2$ で，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 4$ 〔　　　〕

(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ 〔　　　〕

(3) $-4 \leqq x \leqq -2$ 〔　　　〕

4 放物線と直線 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点A，Bがあり，Aの座標は$(-6,\ 9)$で，Bの x 座標は 8 である。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) a の値を求めなさい。

〔　　　〕

(2) 点Bの座標を求めなさい。

〔　　　〕

(3) 直線 AB の式を求めなさい。

〔　　　〕

(4) △OAB の面積を求めなさい。

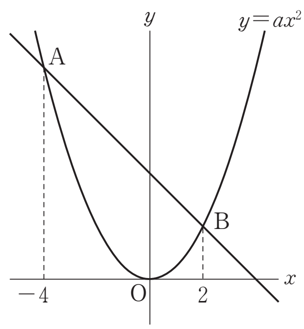
〔　　　〕

STEP 問題

1 関数 $y=3x^2$ で，x の値が a から $a+2$ まで増加するときの変化の割合は18である。a の値を求めなさい。

〔　　　　　〕

2 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に x 座標が -4，2 である2点A，Bがある。直線ABの傾きが -1 であるとき，次の問いに答えなさい。



(1)　a の値を求めなさい。

〔　　　　　〕

(2)　△OABの面積を求めなさい。

〔　　　　　〕

(3)　$y=ax^2$ のグラフ上の点Aと原点Oの間に点Cをとり，△OABと△CABの面積が等しくなるようにしたい。点Cの座標を求めなさい。

〔　　　　　〕

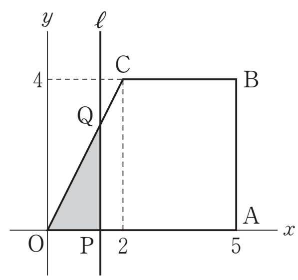
コーチ

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=mx+n$ の交点

$ax^2=mx+n$

を解くと，交点の x 座標がわかる。

3 右の図のような台形OABCがあり，その各頂点の座標はそれぞれO(0, 0)，A(5, 0)，B(5, 4)，C(2, 4)である。辺OA上に点Oから点Aまで動く点P(t, 0)をとる。その点Pを通り，y 軸に平行な直線を ℓ とすると，ℓ は台形OABCを2つの部分に分ける。その2つの部分のうち，ℓ の左側にある部分の図形の面積を S とする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　$0 \leqq t \leqq 2$ のとき，直線 ℓ と辺OCとの交点をQとする。点Qの座標を t を使って表しなさい。

〔　　　　　〕

(2)　t の変域が次の場合について，S を t の式で表しなさい。

①　$0 \leqq t \leqq 2$　　　　②　$2 \leqq t \leqq 5$

〔　　　　　〕　　〔　　　　　〕

(3)　S と t の関係を表すグラフをかきなさい。