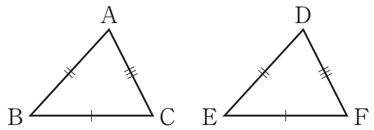
17 三角形の合同の証明

4章 平行と合同

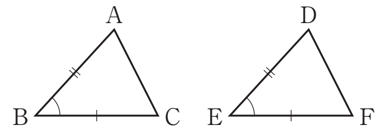
復習問題

1 **三角形の合同条件(2年)** 次の図で，同じ印をつけた辺や角はそれぞれ等しい。あてはまる合同条件を，それぞれ答えなさい。

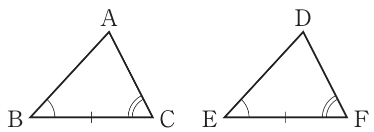
□(1)



□(2)



□(3)



学習の基本1 仮定と結論

重要 「p ならば q」という形で書かれたとき，p の部分を**仮定**，q の部分を**結論**という。

例 下のことがらの仮定と結論は，次のようになる。

(1) △ABC≡△DEF ならば，AC＝DF

あることがらが「p ならば q」という形で書かれたとき，

仮定は「ならば」の前の部分の p

結論は「ならば」のあとの部分の q

である。

仮定…△ABC≡△DEF

結論…AC＝DF

(2) 合同な２つの三角形の面積は等しい。

文を「p ならば q」の形になおすと，

「２つの三角形が合同ならば，面積は等しい」となる。

仮定…２つの三角形が合同

結論…面積は等しい

確認問題

1 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

□(1) $a=b$ ならば，$a+c=b+c$ である。

□(2) x が６の倍数ならば，x は３の倍数である。

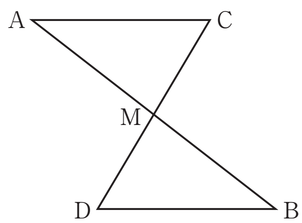
□(3) 長方形の１つの内角は 90°である。

1
「ならば」の前の部分が仮定，あとの部分が結論である。
(3)「長方形ならば，１つの内角は 90°である。」と書きかえられる。

学習の基本2　三角形の合同の証明

重要　あることがらが成り立つわけを，測定などにたよらず，それまでに学んだ性質を根拠にして理づめで示すことを**証明**という。また，証明されたことがらで，よく用いられるものを**定理**という。

問題　**下の図で，AM＝BM，CM＝DM である。このとき，△AMC≡△BMD を証明しなさい。**



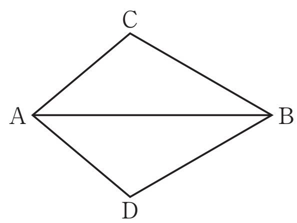
考え方　「仮定…AM＝BM，CM＝DM」，「結論…△AMC≡△BMD」である。仮定と，対頂角が等しいことを使って，合同条件に導く。

証明　**△AMC と △BMD において，**
仮定から，AM＝BM　……①
CM＝DM　……②
対頂角は等しいから，
∠AMC＝∠BMD　……③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
△AMC≡△BMD

着目する三角形を書く。
↓
「仮定からいえること」「図形の性質からいえること」を書く。
↓
合同条件を書き，「≡」を使って表す。

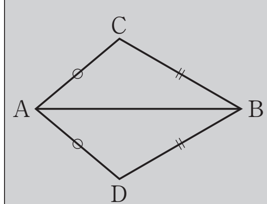
確認問題

2　□ 右の図で，AC＝AD，BC＝BD である。このとき，△ABC≡△ABD となることを次のように証明した。下線部をうめなさい。

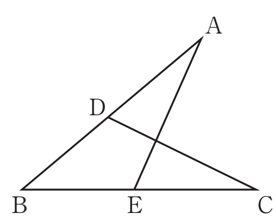


〔仮定〕　AC＝＿＿＿＿，BC＝＿＿＿＿
〔結論〕　△ABC≡＿＿＿＿＿＿
〔証明〕　△ABC と △ABD において，
仮定から，AC＝＿＿＿＿　……①
BC＝＿＿＿＿　……②
共通な辺だから，AB＝＿＿＿＿　……③
①，②，③より，＿＿＿＿＿＿がそれぞれ等しいから，
＿＿＿＿＿＿≡＿＿＿＿＿＿

2　仮定で与えられた条件は，図に印をつけるとよい。



3　□ 右の図で，BA＝BC，BD＝BE である。このとき，∠AEB＝∠CDB となることを次のように証明した。下線部をうめなさい。

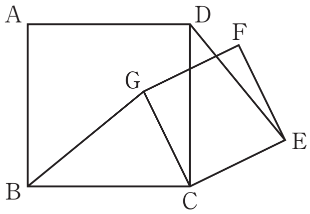


〔仮定〕　BA＝＿＿＿＿，BD＝＿＿＿＿
〔結論〕　∠AEB＝＿＿＿＿＿＿
〔証明〕　△ABE と＿＿＿＿＿＿において，
仮定から，BA＝＿＿＿＿　……①
BE＝＿＿＿＿　……②
共通な角だから，∠EBA＝＿＿＿＿＿＿　……③
①，②，③より，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿が
それぞれ等しいから，
△ABE≡＿＿＿＿＿＿
合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，
∠AEB＝＿＿＿＿＿＿

3　「∠AEB＝∠CDB」が結論である。
△ABE と △CBD の合同がいえれば，対応する角の大きさが等しいことから結論がいえる。

学習の基本③　角度が等しいことを使った合同の証明

問題　下の図で，四角形 ABCD と四角形 CEFG は正方形である。このとき，△BCG≡△DCE であることを証明しなさい。

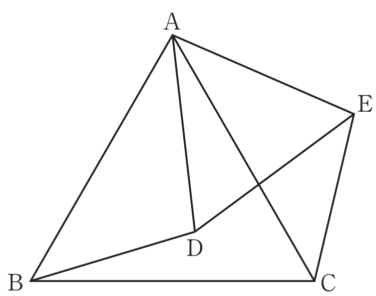


考え方　BC，DC は正方形 ABCD の辺，CG，CE は正方形 CEFG の辺である。
　また，∠BCG は「∠BCD（90°）から∠GCD をひいた角」，∠DCE は「∠GCE（90°）から∠GCD をひいた角」だから等しくなる。

証明　△BCG と△DCE において，
四角形 ABCD，四角形 CEFG は正方形だから，
　BC＝DC　……①
　CG＝CE　……②
正方形の 1 つの内角は90°だから，
　∠BCG＝90°－∠GCD　……③
　∠DCE＝90°－∠GCD　……④
③，④より，∠BCG＝∠DCE　……⑤
①，②，⑤より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
　△BCG≡△DCE

確認問題

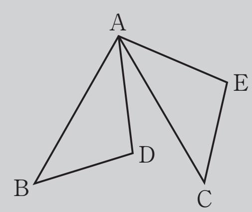
4　下の図で，△ABC と△ADE は正三角形である。このとき，△ABD≡△ACE となることを証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



〔証明〕　△ABD と△ACE において，
△ABC，△ADE は正三角形だから，
　AB＝＿＿＿＿＿　……①
　AD＝＿＿＿＿＿　……②
正三角形の 1 つの内角は 60° だから，
　∠BAD＝60°－＿＿＿＿＿　……③
　∠CAE＝60°－＿＿＿＿＿　……④
③，④より，∠BAD＝＿＿＿＿＿　……⑤
①，②，⑤より，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿が
それぞれ等しいから，
　△ABD≡＿＿＿＿＿

4
∠BAD も，∠CAE も，正三角形の 1 つの角から ∠DAC をひいてできることに着目する。

複雑な図では，証明する三角形を抜き出した図をかいて確認するとよい。



定着問題

学1 1 仮定と結論
⇨類1

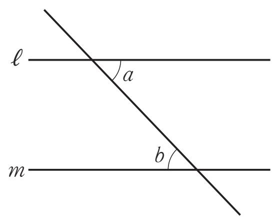
(1) 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

□① $a=b$ ならば，$ac=bc$ である。

□② △ABC≡△DEF ならば，∠CBA＝∠FED である。

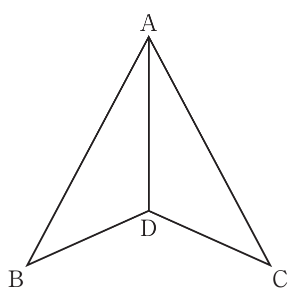
□(2) 次のことがらの仮定と結論を，図の中の記号を使って，式の形で書きなさい。

「2 直線が平行ならば，錯角は等しい。」



学2 2 三角形の合同の証明①
⇨類2

□ 下の図で，AB＝AC，∠BAD＝∠CAD である。このとき，△ABD≡△ACD であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



〔証明〕 ______ と ______ において，

仮定から，

______ ＝ ______ ……①

______ ＝ ______ ……②

共通な辺だから，______ ＝ ______ ……③

①，②，③より，____________ がそれぞれ等しいから，

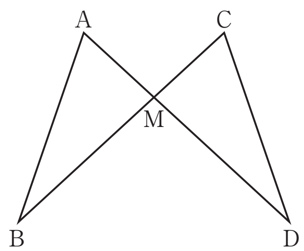
______ ≡ ______

学2

3　三角形の合同の証明②

⇨類③

□ 下の図で，AM＝CM，BM＝DM である。このとき，AB＝CD であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。

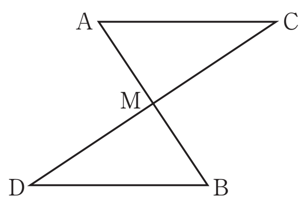


〔証明〕 ______と______において，
仮定から，
______＝______ ……①
______＝______ ……②
______は等しいから，
∠AMB＝______ ……③
①，②，③より，______________が
それぞれ等しいから，
______≡______
合同な図形の対応する______は等しいから，
______＝______

4　三角形の合同の証明③

⇨類④

□ 下の図で，AC∥DB，CM＝DM である。このとき，△ACM≡△BDM であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



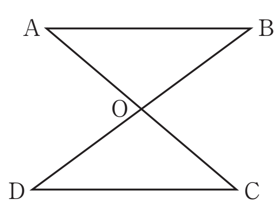
平行線があるときは，同位角や錯角を考えてみる。

〔証明〕 △ACM と______において，
仮定から，______＝______ ……①
______は等しいから，
∠AMC＝______ ……②
AC∥DB より，平行線の______は等しいから，
______＝______ ……③
①，②，③より，______________が
それぞれ等しいから，
______≡______

5　三角形の合同の証明④

⇨類⑤

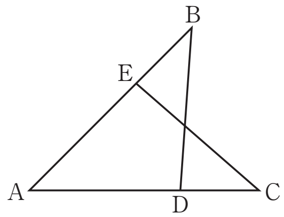
□ 下の図で，AB∥DC，AB＝CD である。このとき，BO＝DO であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



〔証明〕 △AOB と______において，
仮定から，______＝______ ……①
AB∥DC より，平行線の______は等しいから，
∠ABO＝______ ……②
∠BAO＝______ ……③
①，②，③より，______________が
それぞれ等しいから，
______≡______
合同な図形の対応する______は等しいから，
______＝______

学2 6 三角形の合同の証明⑤ ⇨類⑥

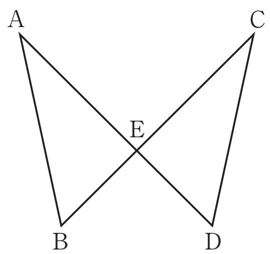
□ 下の図で，AD＝AE，∠ADB＝∠AEC である。このとき，△ADB≡△AEC であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



〔証明〕 △ADB と＿＿＿＿において，
仮定から，AD＝＿＿＿＿　……①
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……②
共通な角だから，
∠BAD＝＿＿＿＿　……③
①，②，③より，＿＿＿＿＿＿＿＿が
それぞれ等しいから，
＿＿＿＿≡＿＿＿＿

7 三角形の合同の証明⑥ ⇨類⑦

□ 下の図で，AB＝CD，∠ABE＝∠CDE である。このとき，△ABE≡△CDE であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。

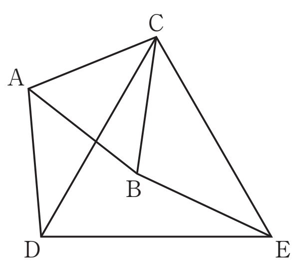


２つの三角形で，２組の角がそれぞれ等しければ，残りの１組の角も等しい。

〔証明〕 △ABE と＿＿＿＿において，
仮定から，AB＝＿＿＿＿　……①
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……②
＿＿＿＿は等しいから，
∠AEB＝＿＿＿＿　……③
②，③と三角形の内角の和が 180° であることから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……④
①，②，④より，＿＿＿＿＿＿＿＿が
それぞれ等しいから，
＿＿＿＿≡＿＿＿＿

学3 8 角度が等しいことを使った合同の証明① ⇨類⑧

□ 下の図で，△ABC，△CDE は正三角形である。このとき，△CAD≡△CBE であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。

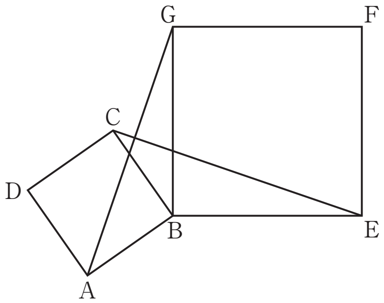


〔証明〕 △CAD と＿＿＿＿において，
△ABC，△CDE は正三角形だから，
CA＝＿＿＿＿　……①
CD＝＿＿＿＿　……②
正三角形の１つの内角は 60° だから，
∠ACD＝60°－∠DCB　……③
＿＿＿＿＝60°－∠DCB　……④
③，④より，＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……⑤
①，②，⑤より，＿＿＿＿＿＿＿＿が
それぞれ等しいから，
＿＿＿＿≡＿＿＿＿

9 角度が等しいことを使った合同の証明②

⇨類⑨

□ 下の図で，四角形 ABCD，BEFG は正方形である。このとき，△ABG≡△CBE であることを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



∠ABG…90° に ∠CBG を加えた角
∠CBE…∠CBG に 90° を加えた角
｝等しい

〔証明〕 △ABG と＿＿＿＿＿において，

四角形 ABCD，四角形 BEFG は正方形だから，

AB＝＿＿＿＿　……①

BG＝＿＿＿＿　……②

正方形の１つの内角は 90° だから，

∠ABG＝90°＋∠CBG　……③

＿＿＿＿＿＝∠CBG＋90°　……④

③，④より，＿＿＿＿＿＝＿＿＿＿＿　……⑤

①，②，⑤より，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿が

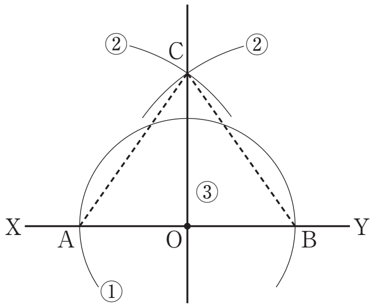
それぞれ等しいから，

＿＿＿＿＿≡＿＿＿＿＿

10 作図の証明

⇨類10

□ 下の図は，直線 XY 上の点Oを通り，XY に垂直な直線 OC を作図したものである。この作図が正しいことを右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



OA と OB は①の円の半径だから等しい。２つの②は，同じ半径のコンパスでつけた印だから，AC＝BC となる。

〔証明〕 AとC，BとCをそれぞれ結ぶ。

△AOC と＿＿＿＿＿において，

仮定から，

AO＝＿＿＿＿　……①

AC＝＿＿＿＿　……②

共通な辺だから，OC＝＿＿＿＿　……③

①，②，③より，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿が

それぞれ等しいから，

＿＿＿＿＿≡＿＿＿＿＿

合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，

∠AOC＝＿＿＿＿＿　……④

④と＿＿＿＿＿＝180° だから，

∠AOC＝＿＿＿＿＿＝90°

よって，OC⊥XY

ゆえに，直線 OC は直線 XY の垂線である。

もう１度やってみよう！

類題演習

1 仮定と結論

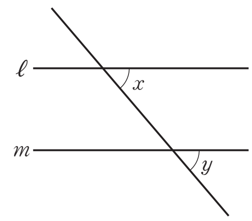
(1)　次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

□①　△PQR≡△STU ならば，PQ＝ST

□②　$a=b$，$b=c$ ならば，$a=c$

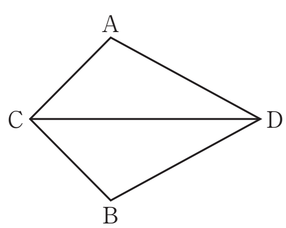
□(2)　次のことがらの仮定と結論を，図の中の記号を使って，式の形で書きなさい。

「同位角が等しいならば，２つの直線は平行である。」



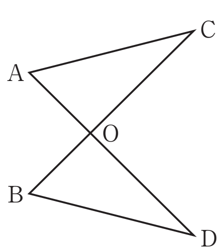
2 三角形の合同の証明①

□ 下の図で，AC＝BC，∠ACD＝∠BCD である。このとき，△ACD≡△BCD であることを証明しなさい。



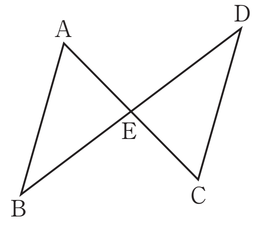
3 三角形の合同の証明②

□ 下の図で，AO＝BO，CO＝DO である。このとき，AC＝BD であることを証明しなさい。



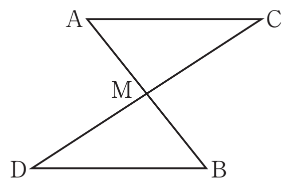
4 三角形の合同の証明③

□ 下の図で，AB∥DC，AE＝CE である。このとき，△ABE≡△CDE であることを証明しなさい。



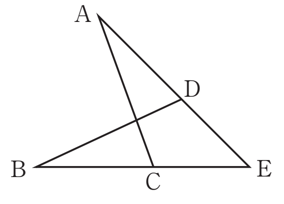
5 三角形の合同の証明④

□ 下の図で，AC∥DB，AC＝BD である。また，M は AB と CD の交点である。このとき，AM＝BM であることを証明しなさい。



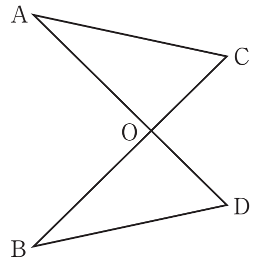
6 三角形の合同の証明⑤

□ 下の図で，AE＝BE，CE＝DE である。このとき，△ACE≡△BDE であることを証明しなさい。



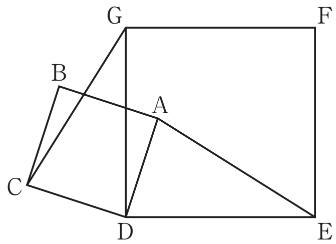
7 三角形の合同の証明⑥

□ 下の図で，AC＝BD，∠ACO＝∠BDO である。このとき，△ACO≡△BDO であることを証明しなさい。



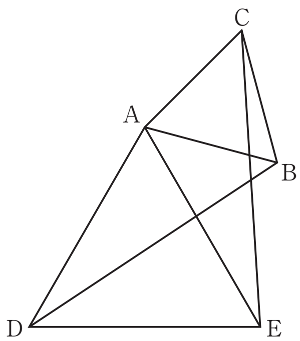
8 角度が等しいことを使った合同の証明①

□ 下の図で，四角形 ABCD，DEFG は正方形である。このとき，△CDG≡△ADE であることを証明しなさい。



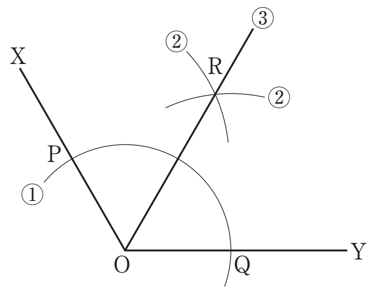
9 角度が等しいことを使った合同の証明②

□ 下の図で，△ABC，△ADE は正三角形である。このとき，△ADB≡△AEC であることを証明しなさい。



10 作図の証明

□ 下の図は，∠XOY の二等分線 OR を作図したものである。この作図が正しいことを，右のように証明した。下線部をうめて，証明を完成させなさい。



〔証明〕 P と R，Q と R をそれぞれ結ぶ。
△POR と＿＿＿＿において，
仮定から，
PO＝＿＿＿＿　……①
PR＝＿＿＿＿　……②
共通な辺だから，OR＝＿＿＿＿　……③
①，②，③より，＿＿＿＿＿＿＿＿が
それぞれ等しいから，
＿＿＿＿≡＿＿＿＿
合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，
∠POR＝＿＿＿＿
よって，直線 OR は ∠XOY の二等分線である。