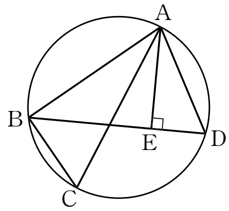
⓫ 円の性質の利用

▶練習問題 ⇒ P73

学習の基本 48 円と相似の証明(1)

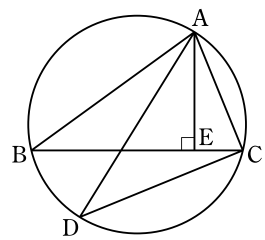
問題 下の図で，4点A，B，C，Dは円周上にあり，線分ACは直径で，∠AED＝90°である。このとき，△ABC∽△AEDであることを証明せよ。



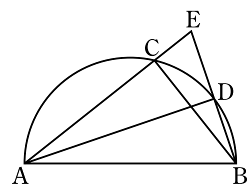
? 右の下線部をうめて証明せよ。

△＿＿＿＿と△＿＿＿＿において，
ACは直径だから，∠＿＿＿＿＝90°
仮定より，∠AED＝90°
よって，
∠＿＿＿＿＝∠＿＿＿＿……①
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから，
∠＿＿＿＿＝∠＿＿＿＿……②
①，②より，＿＿＿＿＿＿＿＿
がそれぞれ等しいから，
△＿＿＿＿∽△＿＿＿＿

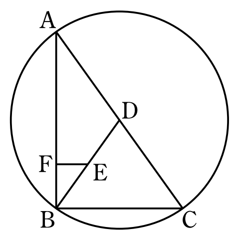
197 右の図で，4点A，B，C，Dは円周上にあり，線分ADは直径である。また，線分BC上に∠AEB＝90°となる点Eをとる。このとき，△ABE∽△ADCであることを証明せよ。



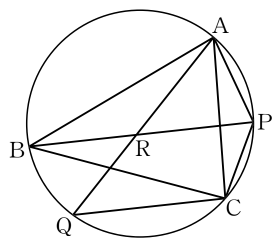
198 右の図のように，線分ABを直径とする半円の弧上に点C，Dを，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$となるようにとる。また，線分ACの延長と線分BDの延長の交点をEとする。このとき，△ABD∽△BECであることを証明せよ。



199 右の図で，3点A，B，Cは円周上にあり，線分ACは直径である。線分ACの中点をDとし，線分BD上に点Eをとる。点Eから線分BCに平行な直線をひき，線分ABとの交点をFとする。このとき，△ABC∽△BFEであることを証明せよ。



応 **200** 右の図で，3点A，B，Cは円周上にある。$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{BC}$上に，BP∥QCとなるように，点P，Qをとる。また，線分AQとBPの交点をRとする。このとき，△ABR∽△ACPであることを証明せよ。

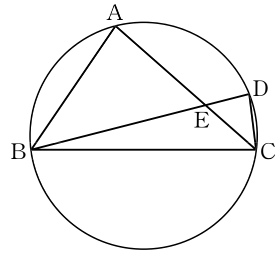


学習の基本　49　円と相似の証明⑵〜線分の長さ〜

問題　**右の図で，4点A，B，C，Dは円周上の点であり，点Eは線分AC，BDの交点である。$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$ であるとき，次の問いに答えよ。**

⑴　△ABC∽△AEB であることを証明せよ。

⑵　AB＝4cm，BC＝6cm，CA＝5cm のとき，線分DCの長さを求めよ。



解　⑴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$ より，∠ACB＝∠ABE となる。

⑵△ABC∽△AEB より，AB：AE＝AC：AB，4：AE＝5：4，AE＝$\frac{16}{5}$cm

よって，EC＝$5-\frac{16}{5}=\frac{9}{5}$(cm)。また，∠BAC＝∠EDC（$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角），

∠ACB＝∠DCE（$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$）より，△ABC∽△DEC でもある。

したがって，AC：DC＝BC：EC，5：DC＝6：$\frac{9}{5}$，DC＝$\frac{3}{2}$cm

答　⑴　△ABC と△AEB において，

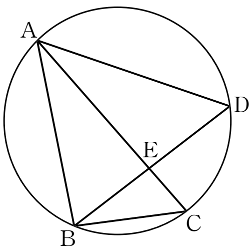
共通な角だから，∠BAC＝∠EAB……①

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$ より，等しい弧に対する円周角は等しいから，∠ACB＝∠ABE……②

①，②より，2組の角がそれぞれ等しいから，△ABC∽△AEB

⑵　$\frac{3}{2}$cm

201 右の図で，4点A，B，C，Dは円周上の点であり，点Eは線分AC，BDの交点である。$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ であるとき，次の問いに答えよ。

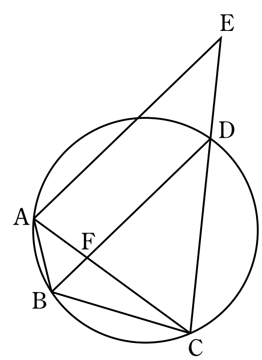


□⑴　△ABC∽△BEC であることを証明せよ。

□⑵　AB＝5cm，BC＝3cm，CA＝6cm のとき，次の線分の長さを求めよ。

①　AD　　　　②　BD

応 **202** 右の図のように，4点A，B，C，Dが円の周上にある。点Aを通り，弦BDに平行な直線と弦CDの延長の交点をEとする。また，弦ACと弦BDの交点をFとする。次の問いに答えよ。

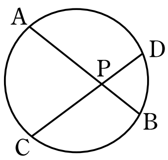


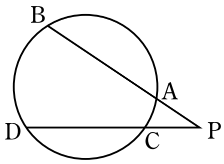
□⑴　△ABF∽△ECA であることを証明せよ。

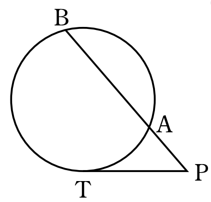
□⑵　AF＝2cm，FC＝4cm，AE＝9cm のとき，線分BDの長さを求めよ。

学習の基本　50　方べきの定理

(1)　下の図の①，②のとき，PA×PB＝PC×PD
(2)　下の図の③のとき，　　PA×PB＝PT^2
これらをまとめて**方べきの定理**という。

①


②


③


（PTは円の接線）

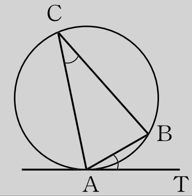
上の(1)は次のように証明できる。

- △PAC∽△PDBより，PA：PD＝PC：PB
  すなわち，PA×PB＝PC×PD

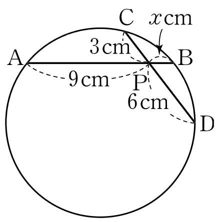
?　接弦定理を用いて，△PTA∽△PBT を示すことにより，上の(2)が成り立つことを証明せよ。

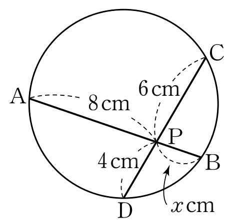
接弦定理

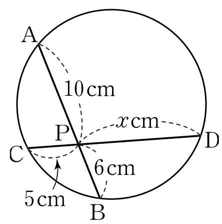
右の図で，ATが円の接線であるとき，∠BAT＝∠ACB

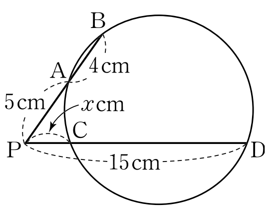


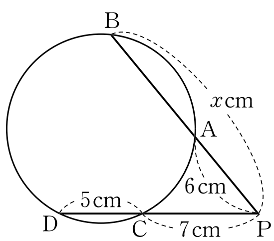
203 次の図で，xの値を求めよ。ただし，(7)〜(9)で，PTは円の接線である。

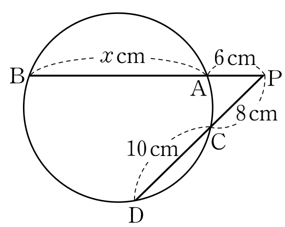
□(1)


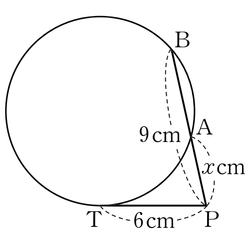
□(2)


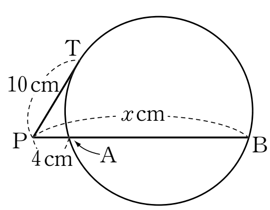
□(3)


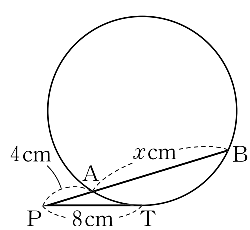
□(4)


□(5)


□(6)


□(7)


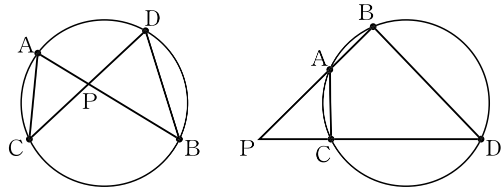
□(8)


□(9)


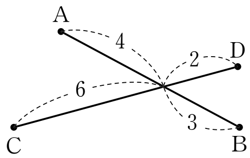
学習の基本 51 方べきの定理の逆

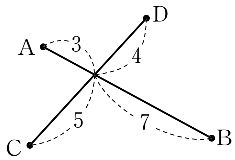
2つの線分AB，CDまたはそれらの延長の交点をPとするとき，$PA\times PB=PC\times PD$ ならば，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある。

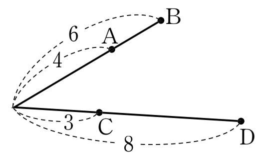
〔証明〕 $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において，
$PA\times PB=PC\times PD$ より，
$PA:PD=PC:PB$
また，$\angle APC=\angle DPB$
2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，$\triangle PAC\backsim\triangle PDB$
よって，$\angle PAC=\angle PDB$ より，4点A，B，C，Dは1つの円周上にある。

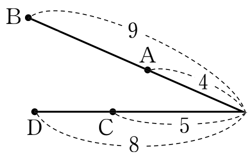


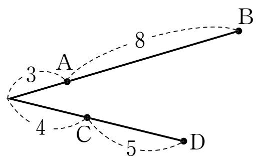
204 次の図で，4点A，B，C，Dが1つの円周上にあるものには○，ないものには×をつけよ。

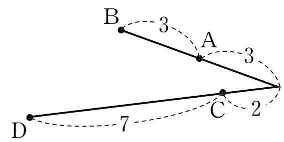
(1)


(2)


(3)


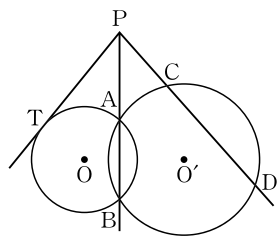
(4)


(5)


(6)


学習の基本 52 方べきの定理の逆と証明

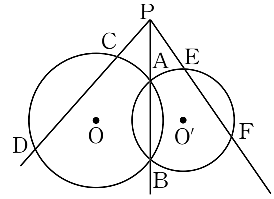
問題 **2点A，Bで交わる2つの円O，O′がある。線分ABの延長上に点Pをとり，Pから円Oに接線PTをひき，円O′と2点C，Dで交わる直線をひく。このとき，PTは3点C，D，Tを通る円の接線であることを証明せよ。**



解 「$PT^2=PC\times PD$ ならば，PTは3点C，D，Tを通る円の接線である」ことを利用する。(これも，方べきの定理の逆である。)

答 円Oにおいて，方べきの定理より，$PA\times PB=PT^2$
円O′において，方べきの定理より，$PA\times PB=PC\times PD$
よって，$PT^2=PC\times PD$
方べきの定理の逆より，PTは3点C，D，Tを通る円の接線である。

205 2点A，Bで交わる2つの円O，O′がある。線分ABの延長上に点Pをとり，Pから円Oと2点C，D，円O′と2点E，Fで交わる直線をひくとき，4点C，D，E，Fは1つの円周上にあることを証明せよ。

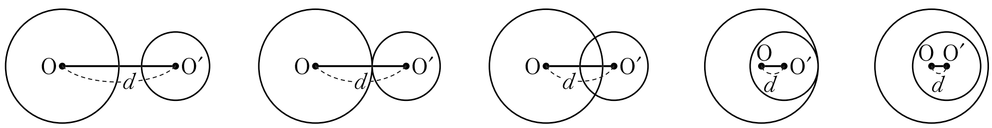


学習の基本 $\boxed{53}$ 2円の位置関係

半径がそれぞれr，r' $(r>r')$の2円O，O′について，位置関係と，中心間の距離をdとしたときのr，r'，dの関係式をまとめると，次の表のようになる。

位置関係	離れている	外接する	2点で交わる	内接する	一方が他方の内部にある
r，r'，dの関係式	$d>r+r'$	$d=r+r'$	$r-r'<d<r+r'$	$d=r-r'$	$d<r-r'$

離れている　外接する　2点で交わる　内接する　一方が他方の内部にある



206 2円の半径が等しいとき，2円の位置関係にはどのようなものがあるか。
□

207 2円の半径をr，r'，2円の中心間の距離をdとするとき，次の2円の位置関係はどうなるか。

□(1)　$r=5$，$r'=3$，$d=6$　　□(2)　$r=4$，$r'=2$，$d=8$

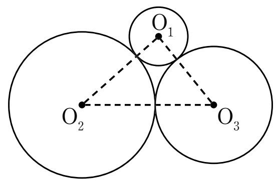
□(3)　$r=6$，$r'=4$，$d=10$　　□(4)　$r=3$，$r'=7$，$d=3$

□(5)　$r=8$，$r'=9$，$d=15$　　□(6)　$r=10$，$r'=6$，$d=4$

208 次の問いに答えよ。

□(1)　半径がそれぞれr，r' $(r>r')$である2つの円がある。2円は，中心間の距離が13のとき外接し，5のとき内接する。r，r'の値を求めよ。

□(2)　右の図のように，3つの円O_1，O_2，O_3が互いに外接している。円O_1の半径が4で，$O_1O_2:O_2O_3:O_3O_1=7:9:6$のとき，円$O_2$，円$O_3$の半径を求めよ。



209 半径が2の円Oと半径がrの円O′があり，中心間の距離は5である。次の問いに答えよ。

□(1)　2円が外接するときのrの値を求めよ。

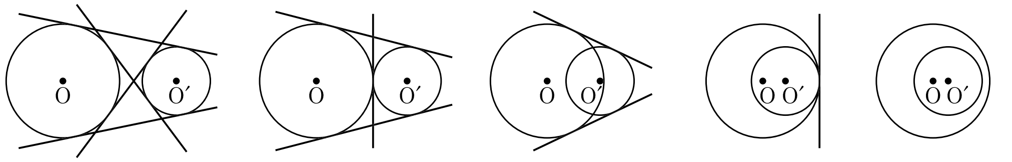
□(2)　2円が共有点をもつときのrの値の範囲を，不等号を使って表せ。

□(3)　円Oが円O′の内部にあるときのrの値の範囲を，不等号を使って表せ。

学習の基本 54 共通接線

半径がそれぞれ r，r'($r>r'$)の2円O，O′について，位置関係と共通接線の数をまとめると，次の表のようになる。

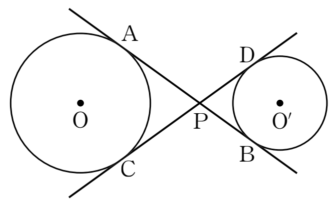
位置関係	離れている	外接する	2点で交わる	内接する	一方が他方の内部にある
共通接線の数	4	3	2	1	0



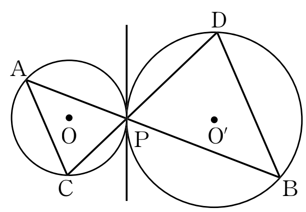
210 中心間の距離が8である2円の半径を r，r' とするとき，次のそれぞれの場合について，共通接線の数を求めよ。

(1)　$r=7$，$r'=6$　　(2)　$r=2$，$r'=4$　　(3)　$r=5$，$r'=3$

211 右の図のように，2つの円O，O′に共通接線をひき，接点をA，B，C，D，2直線の交点をPとするとき，AB＝CDであることを証明せよ。

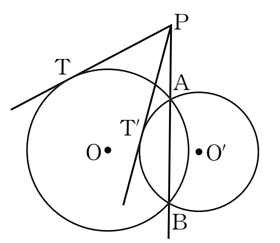


応 **212** 右の図のように，点Pで外接する2つの円O，O′と点Pを通る2つの直線との交点をA，B，C，Dとするとき，△PAC∽△PBDであることを証明せよ。



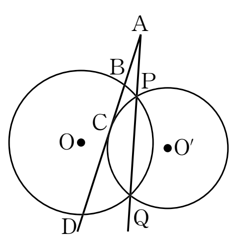
学習の基本 55 交わる2円

問題　**2点A，Bで交わる2つの円O，O′がある。線分ABの延長上の点Pから円O，O′にそれぞれ接線PT，PT′をひくとき，PT＝PT′であることを証明せよ。**



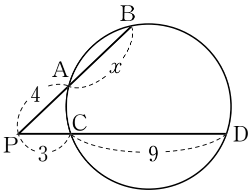
答　円Oにおいて，方べきの定理より，PA×PB＝PT^2
円O′において，方べきの定理より，PA×PB＝PT'^2
よって，$PT^2=PT'^2$，PT＞0，PT′＞0だから，PT＝PT′

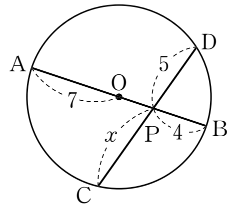
213 2点P，Qで交わる2つの円O，O′がある。右の図のように，直線PQ上の点Aから円O′に接線ACをひき，円Oとの交点をB，Dとする。AB＝BC＝4cmのとき，線分CDの長さを求めよ。

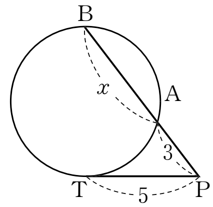


練習問題　11　円の性質の利用

214 次の図で，xの値を求めよ。ただし，(2)の点Oは円の中心，(3)のPTは円の接線である。

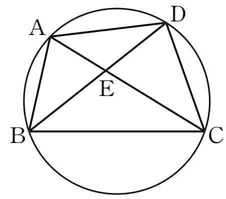
□(1)


□(2)


□(3)


応 **215** 右の図のように，四角形ABCDの4つの頂点A，B，C，Dは円の周上にあり，点Eは対角線ACとBDの交点である。

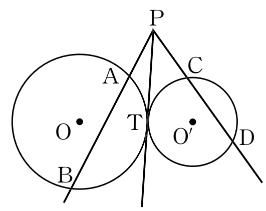
AD＝CD のとき，次の問いに答えよ。



□(1)　△ABD∽△EAD であることを証明せよ。

□(2)　AB＝5cm，AD＝6cm，BD＝9cm のとき，線分ACの長さを求めよ。

216 右の図のように，点Tにおいて外接する2つの円O，O′がある。
□点Tにおける共通接線上の点Pを通り，円O，O′とそれぞれ2点で交わる2つの直線をひき，その交点をA，B，C，Dとするとき，4点A，B，C，Dは1つの円周上にあることを証明せよ。



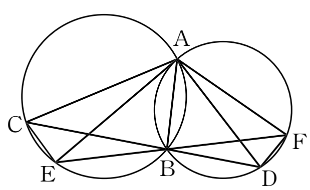
217 半径が4とrの2つの円がある。中心間の距離が7であるとき，次の問いに答えよ。

□(1)　$r=2$ のとき，2円の共通接線の数を求めよ。

□(2)　2円の共通接線が1本であるときのrの値を求めよ。

□(3)　2円の共通接線が2本であるときのrの値の範囲を，不等号を使って表せ。

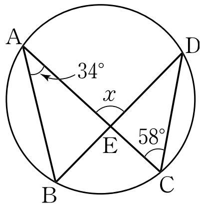
応 **218** 2点A，Bで交わる2つの円がある。右の図のように，
□点Bを通る2つの直線と2つの円との交点をそれぞれC，D，E，Fとするとき，△ACE∽△ADF であることを証明せよ。



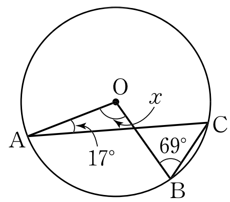
3章の確認

219 **円周角の定理**　次の図で，$\angle x$の大きさを求めよ。

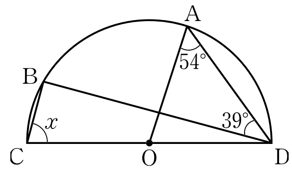
□(1)



□(2)

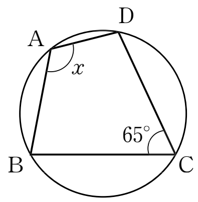


□(3)

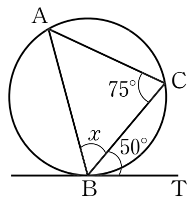


220 **内接四角形・接弦定理**　次の図で，$\angle x$の大きさを求めよ。ただし，(2)，(3)で，BTは円の接線，Bはその接点である。

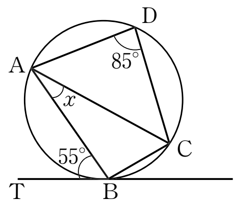
□(1)



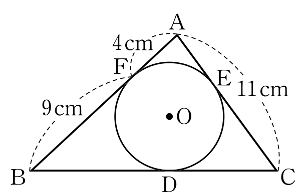
□(2)



□(3)



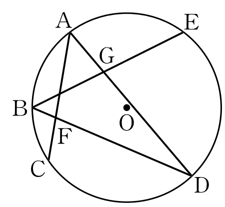
221 **接線の長さ**　右の図で，直線AB，BC，CAは，円Oの接線で，点D，E，Fは接点である。このとき，次の線分の長さを求めよ。



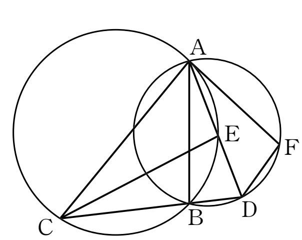
□(1)　線分CE

□(2)　線分BC

222 **円周角の定理の逆と証明**　右の図のように，5点A，B，C，D，Eは円Oの周上にあり，$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$である。弦ACと弦BDの交点をF，弦ADと弦BEの交点をGとする。このとき，4点A，B，F，Gは1つの円周上にあることを証明せよ。
□

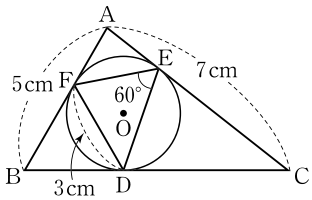


223 **円と相似の証明**　右の図のように，2点A，Bで交わる大小2つの円があり，点Bを通る直線とそれぞれ点C，Dで交わっている。線分ADと大きい円との交点をE，点Aにおける大きい円の接線と小さい円との交点をFとするとき，△ACE∽△DAFであることを証明せよ。
□



章末問題

応 224 右の図のように，円Oは△ABCの3辺BC，CA，ABとそれぞれ点D，E，Fで接している。このとき，次の問いに答えよ。

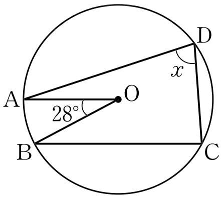


□(1)　∠ABCの大きさを求めよ。

□(2)　辺BCの長さを求めよ。

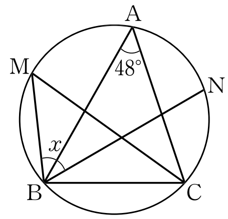
応 225 次の図で，$\angle x$の大きさを求めよ。

□(1)



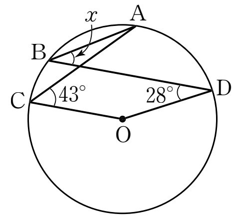
(AO∥BC)

□(2)



$\left(\begin{array}{l}\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}\\ \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NC}\end{array}\right)$

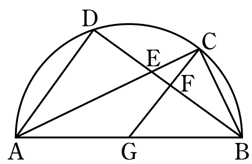
□(3)



(BD∥CO)

応+ 226 右の図は線分ABを直径とする半円で，点C, Dは弧上の点，点Eは線分ACとBDの交点である。点Cを通り線分ADに平行な直線と線分DB，ABとの交点をそれぞれF，Gとする。

BC：AC＝1：2，AE：EC＝3：1のとき，次の問いに答えよ。



□(1)　△ABC∽△AED であることを証明せよ。

□(2)　四角形EAGFと△ABDの面積比を求めよ。

応 227 □ 右の図のように，点Oを中心とする2つの円があり，点Aは内側の円の周上の点である。点Aを通る内側の円の接線と外側の円との交点をB，Cとする。また，直線BOと内側の円との交点をD, Eとし，線分COと内側の円との交点をFとする。このとき，△AFC∽△EAB であることを証明せよ。