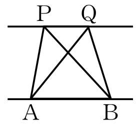
18 平行線と面積　　4章　三角形と四角形

87 平行線と面積

① △ABC と △DEF の面積が等しいとき，△ABC＝△DEF と書く。

② 右の図で，(1) PQ∥AB ならば，△PAB＝△QAB

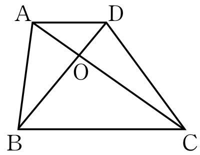
(2) △PAB＝△QAB ならば，PQ∥AB



AD∥BC である台形 ABCD の対角線の交点を O とするとき，次の問いに答えよ。

(1) △ABC と面積が等しい三角形はどれか。

(2) △ABO と面積が等しい三角形はどれか。

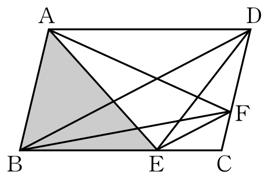


解 (1) AD∥BC だから，△ABC と △DBC の底辺を BC とすると，高さは等しい。
よって，△ABC と △DBC は底辺が共通で，高さが等しいから，△ABC＝△DBC

(2) △ABO＝△ABC－△OBC，△DOC＝△DBC－△OBC
△ABC＝△DBC だから，△ABO＝△DOC

答 (1) △DBC　　(2) △DOC

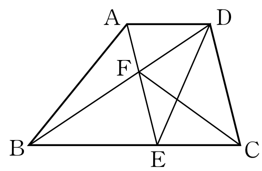
359 右の図の四角形 ABCD は平行四辺形で，EF∥BD である。このとき，△ABE と面積の等しい図中の三角形をすべてあげよ。



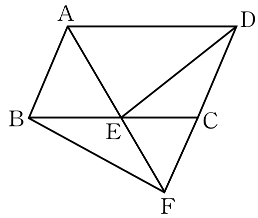
360 右の図の四角形 ABCD で，AD∥BC，AE∥DC である。

(1) △ABE と面積の等しい図中の三角形をすべてあげよ。

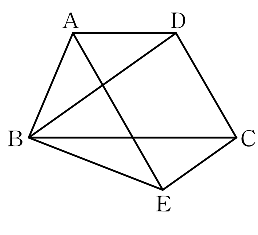
(2) △ABF と △DFC では，どちらの方が面積が大きいか。



361 右の図のように，▱ABCD の辺 BC 上に点 E をとり，AE の延長と辺 DC の延長との交点を F とする。B と F，D と E を結ぶと，△DEC＝△BFE であることを証明せよ。



応 **362** 右の図のように，AD∥BC である台形 ABCD で，点 A を通り辺 DC に平行な直線と，点 C を通り対角線 BD に平行な直線との交点を E とする。B と E を結ぶと，△ABD＝△BEC であることを証明せよ。

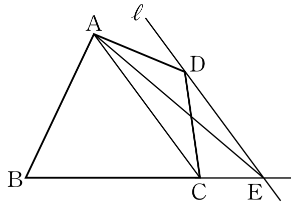


88　等積変形

右の図は，次のようにして，四角形 ABCD と面積が等しい △ABE を作ったものである。

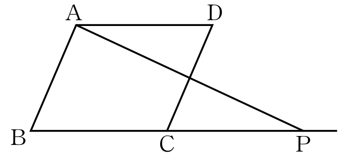
① 頂点 D を通って対角線 AC に平行な直線 ℓ をひく。
② 直線 ℓ と辺 BC の延長との交点を E とする。
③ A と E を結ぶ。

このとき，四角形 ABCD＝△ABE であることを証明せよ。

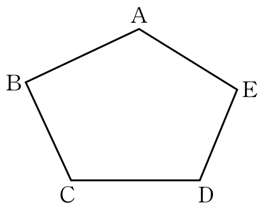


解　DE∥AC より，△DAC＝△EAC だから，
四角形 ABCD＝△ABC＋△DAC＝△ABC＋△EAC＝△ABE　終

363　右の図のように，▱ABCD の辺 BC の延長上に点 P をとって，▱ABCD の面積と △ABP の面積が等しくなるようにしたい。このとき，BC と BP の長さの関係をどのようにすればよいか。

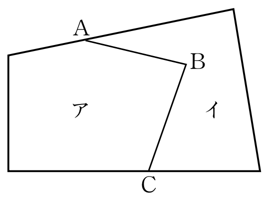


364　右の図の五角形 ABCDE と面積の等しい △APQ を作れ。ただし，点 P，Q は直線 CD 上にあるようにせよ。
(図をかいて，その方法を説明せよ。)

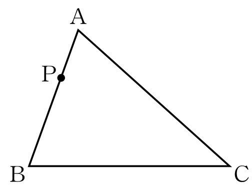


365　次の問いに答えよ。

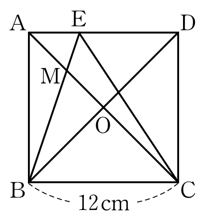
(1)　右の図で，ア，イの面積を変えずに，境界の折れ線 ABC を点 A を通る 1 つの直線にせよ。



応 (2)　右の図のように，△ABC の辺 AB 上に点 P がある。点 P を通る直線をひいて，△ABC の面積を 2 等分せよ。



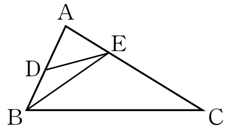
366　右の図の正方形 ABCD で，点 O は対角線の交点，点 M は AO の中点，点 E は BM の延長が AD と交わる点である。△EMC の面積を求めよ。



89 面積の比

高さが等しい 2 つの三角形の面積の比は底辺の比に等しい。

右の図の △ABC で，点 D，E はそれぞれ辺 AB，AC 上にある。AD：DB＝1：1，AE：EC＝1：2 であるとき，次の三角形の面積の比を求めよ。



(1) △ABE：△ABC　　　　(2) △ADE：△ABC

解 (1) △ABE と △ABC の底辺をそれぞれ AE，AC とすると，高さは等しいから，

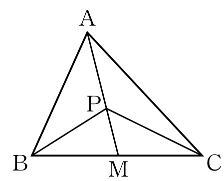
△ABE：△ABC＝AE：AC＝1：(1＋2)＝**1：3**

(2) AD：AB＝1：2 より，△ADE＝$\frac{1}{2}$△ABE。AE：AC＝1：3 より，

△ABE＝$\frac{1}{3}$△ABC。よって，△ADE＝$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$△ABC＝$\frac{1}{6}$△ABC

したがって，△ADE：△ABC＝$\frac{1}{6}$△ABC：△ABC＝**1：6**

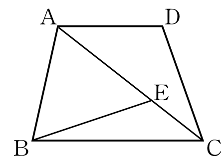
367 右の図の △ABC で，点 M は辺 BC の中点である。また，点 P は線分 AM 上にあり，AP：PM＝3：2 である。



□(1) △ABP：△ABC を求めよ。

□(2) △ABC＝65 cm² のとき，△PMC の面積を求めよ。

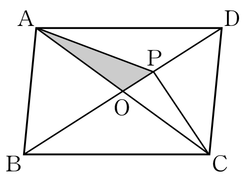
368 右の図の四角形 ABCD は AD∥BC の台形で，点 E は対角線 AC 上の点である。AD：BC＝3：5，AE：EC＝2：1 のとき，次の問いに答えよ。



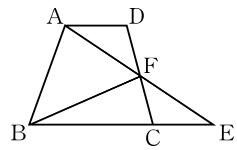
□(1) △ABC：△ACD を求めよ。

□(2) △BCE の面積と台形 ABCD の面積の比を求めよ。

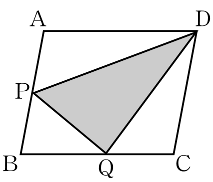
369 右の図の ▱ABCD で，点 P は対角線 BD 上の点である。また，
□OP：PD＝2：5 である。▱ABCD の面積が 70 cm² のとき，△AOP の面積を求めよ。



応 **370** 右の図は，AD∥BC である台形 ABCD の辺 BC の延長上に AD＝CE
□となる点 E をとり，AE と CD の交点を F としたものである。このとき，△ABF の面積は台形 ABCD の面積の $\frac{1}{2}$ であることを証明せよ。

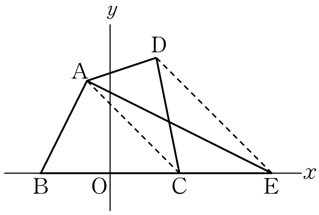


応 **371** 右の図の ▱ABCD の面積は 180 cm² で，AP：PB＝1：1，
□BQ：QC＝5：4 である。このとき，△DPQ の面積を求めよ。



90　等積変形と１次関数

右の図のように，4 点 A(−1，4)，B(−3，0)，C(3，0)，D(2，5) と，x 軸上にあって x 座標が正の点 E がある。四角形 ABCD と △ABE の面積が等しいとき，点 E の座標を求めよ。



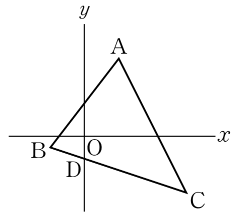
解　四角形 ABCD＝△ABE より，△ACD＝△ACE だから，AC∥DE である。

直線 AC の傾きは，$\dfrac{0-4}{3-(-1)}=-1$

直線 DE の式は $y=-x+b$ と表される。この式に点 D の座標，$x=2$，$y=5$ を代入すると，$5=-2+b$，$b=7$ だから，直線 DE の式は，$y=-x+7$

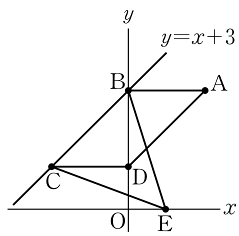
点 E の x 座標は，$0=-x+7$ より，$x=7$。よって，**E(7，0)**

372　右の図のように，3 点 A(3，7)，B(−3，−1)，C(9，−5) を頂点とする △ABC があり，辺 BC と y 軸との交点を D とする。



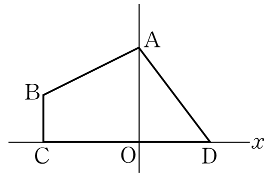
□(1)　点 D の座標を求めよ。
□(2)　辺 AC の中点を E とする。点 E の座標を求めよ。
□(3)　点 D を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

373　右の図の四角形 ABCD は平行四辺形で，点 B，D は y 軸上の点，D の y 座標は 1 である。辺 AB は x 軸に平行で，直線 BC の式は $y=x+3$ である。また，点 E は x 軸上の点で，その x 座標は正である。



□(1)　点 A の座標を求めよ。
応 □(2)　▱ABCD と △BCE の面積が等しいとき，直線 BE の式を求めよ。

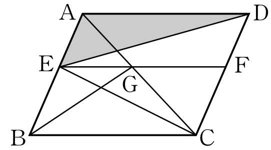
374　右の図のように，4 点 A(0，4)，B(−4，2)，C(−4，0)，D(3，0) を頂点とする四角形 ABCD がある。



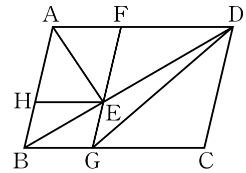
□(1)　点 A を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。
応 □(2)　原点 O を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線と辺 AB との交点の y 座標を求めよ。

節 末 問 題

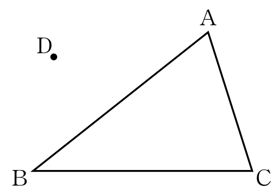
375 右の図の四角形 ABCD は平行四辺形で，EF∥AD である。このとき，△AED と面積の等しい図中の三角形をすべてあげよ。ただし，点 E は辺 AB の中点ではないものとする。



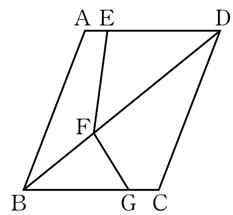
376 右の図のように，▱ABCD の対角線 BD 上に点 E をとり，点 E を通り辺 AB に平行な直線と辺 AD，BC との交点をそれぞれ F，G，点 E を通り辺 AD に平行な直線と辺 AB との交点を H とする。A と E，D と G を結ぶと，△AHE＝△DEG であることを証明せよ。



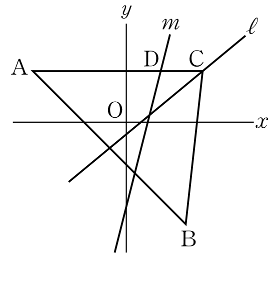
377 右の図のように，△ABC と点 D が与えられている。辺 AC 上に点 E をとって，四角形 DBCE の面積が △ABC の面積と等しくなるようにしたい。点 E をどこにとればよいか。図をかいて示せ。



応 **378** 右の図の ▱ABCD で，点 E，F，G はそれぞれ辺 AD，対角線 BD，辺 BC 上の点である。また，AE：ED＝1：5，BF：FD＝5：9，BG：GC＝7：2 である。このとき，四角形 ABFE と四角形 DFGC の面積の比を求めよ。

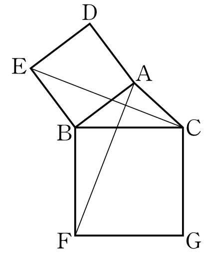


応 **379** 右の図のように，3 点 A(−11，6)，B(7，−12)，C(9，6) を頂点とする △ABC と，辺 AC 上の点 D(4，6) がある。点 C を通る直線 ℓ，点 D を通る直線 m はそれぞれ △ABC の面積を 2 等分している。直線 ℓ，m の式を求めよ。

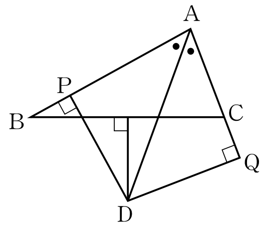


4章のハイレベル問題①

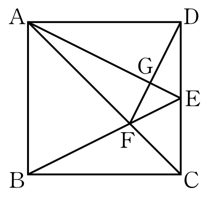
380　右の図のように，△ABC の辺 AB，BC をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB と正方形 BFGC を △ABC の外側に作る。このとき，AF＝EC であることを証明せよ。



381　右の図は，△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の垂直二等分線の交点を D とし，D から直線 AB，AC にそれぞれ垂線 DP，DQ をひいたものである。このとき，BP＝CQ であることを証明せよ。



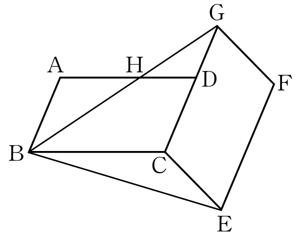
★ **382**　右の図で，四角形 ABCD は正方形であり，点 E は辺 CD の中点である。また，点 F は対角線 AC と線分 BE の交点，点 G は線分 AE と線分 DF の交点である。このとき，∠EGF＝90° であることを証明せよ。



★ **383**　右の図のように，▱ABCD と ▱CEFG がある。これらの平行四辺形は合同で，図のようにならんでいる。
BG と AD の交点を H とするとき，次の問いに答えよ。

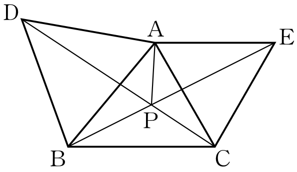
(1)　AB＝AH であることを証明せよ。

(2)　AB＝3 cm，BC＝5 cm，∠ABC＝60° とする。
▱ABCD と四角形 BEFG の面積の比を求めよ。



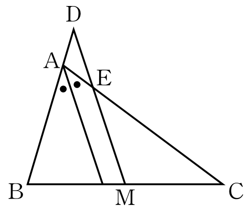
4章のハイレベル問題②

★★ **384** 右の図のように，△ABC の辺 AB，AC をそれぞれ1辺とする正三角形 ABD，ACE をかき，線分 CD と線分 BE の交点を P とする。
PA＋PB＋PC＝CD となることを証明せよ。

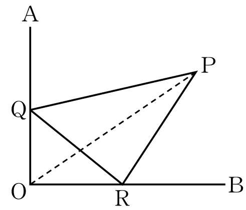


★★ **385** 右の図は，AB＜AC である △ABC の辺 BC の中点 M を通って∠A の二等分線に平行にひいた直線が，辺 BA の延長，辺 AC と交わる点をそれぞれ D，E としたものである。

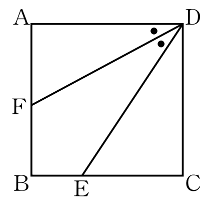
このとき，$BD=CE=\frac{1}{2}(AB+AC)$ であることを証明せよ。



★★ **386** 右の図のように，∠AOB の内部に点 P，辺 OA 上に点 Q，辺 OB 上に点 R をとって，△PQR を作る。∠AOB＝90° のとき，PQ＋QR＋RP＞2OP であることを証明せよ。



★★ **387** 右の図のように，正方形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとり，∠ADE の二等分線が辺 AB と交わる点を F とする。このとき，DE＝AF＋EC であることを証明せよ。



●放課後数学クラブ●　数学力を身につけよう　4章　三角形と四角形

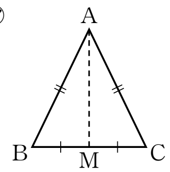
先　生：「2辺が等しい三角形は二等辺三角形である」ことは**定義**なので，そのまま受け入れるとして，二等辺三角形の**性質**である「2つの底角は等しい」ことや「頂角の二等分線は底辺を$\boxed{\text{　A　}}$する」ことについて，なぜそれが成り立つのかを考えてみることにしましょう。

か　い：小学校では二等辺三角形の紙を半分に折ったとき，それがぴったり重なるから2つの角の大きさが等しいと考えたと思います。

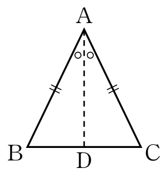
まどか：「三角形の内角の和が180°になること」もそうだったけど，実験的に得られた結果は，たまたまそうなっただけかもしれないから，どんな二等辺三角形でもそれが成り立つことを証明しないとダメということですよね，先生。

先　生：さすが，まどかさん。言いたいことをズバリ言われてしまった！　まさしくその通りです。では，次のような問題を考えてみましょう。

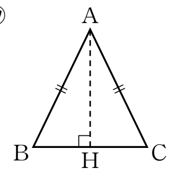
問題1　**AB＝ACである二等辺三角形ABCにおいて，∠B＝∠Cであること，すなわち2つの底角が等しいことを，次の㋐～㋓の図をかいて証明することにした。**
㋐～㋓のそれぞれの図について，証明が可能か不可能かを答えよ。

㋐


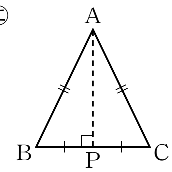
辺BCの中点をMとし，線分AMをひく。

㋑


∠Aの二等分線をひき，辺BCとの交点をDとする。

㋒


頂点Aから辺BCに垂線をひき，辺BCとの交点をHとする。

㋓


辺BCの中点をPとし，Pを通る辺BCの垂線をひく。

か　い：証明させるのではなく，証明できるかどうかを聞くなんて面白い問題だ。
合同な図形の対応する角の大きさが等しいことから，∠B＝∠Cを示せばいいから，㋐だと，△ABM≡△ACMを証明できればいいんだよね。

まどか：㋐の場合は$\boxed{\text{　B　}}$がそれぞれ等しいから，△ABM≡△ACMがいえるわ。
つまり，㋐は証明$\boxed{\text{ア}}$よね。

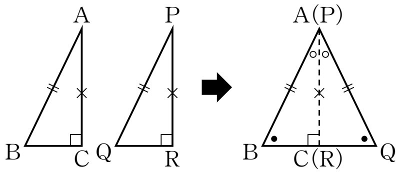
あなた：㋑の場合は$\boxed{\text{　C　}}$がそれぞれ等しいから，△ABD≡△ACDがいえるよね。
よって，㋑は証明$\boxed{\text{イ}}$だよ。

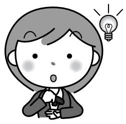
か　い：㋒はどうかな？　図からは，AB＝AC，AHが共通，∠AHB＝∠AHC＝90°であることがわかるけど，これは三角形の合同条件にあてはまらないんじゃないかな。90°の角は2組の辺の間にある角じゃないし。

まどか：でも㋒は，直角三角形の$\boxed{\text{　D　}}$がそれぞれ等しいから，△ABH≡△ACHといえるんじゃないかしら。だから，㋒は証明可能だと思うのだけど。

先　生：ちょっと待って下さい。そもそも「$\boxed{\text{　D　}}$がそれぞれ等しい2つの直角三角形は合同である」といえるのは，なぜですか？

かい：例えば，∠ACB＝∠PRQ＝90°，AB＝PQ, AC＝PR である２つの直角三角形について，△ABC≡△PQR であることを示すには，右のように２つの三角形をくっつけた図をかいて…。





まどか：AB＝AQ より∠ABC＝∠AQR，残りの角についても ∠BAC＝∠QAC となるから，「１組の辺とその両端の角」か「２組の辺とその間の角」という合同条件を使えば…。あっ，AB＝PQ より ∠ABC＝∠PQR の部分はダメですね。

あなた：「 D がそれぞれ等しい２つの直角三角形は合同である」ことの根拠として，「二等辺三角形の２つの底角が等しい」ことを使ってしまっているから，㋒は証明 ウ ということになるよ。

先　生：そうですね。**証明すべき事柄から導かれる内容を先に使ってしまうのはよくない**ですね。さて，㋓はどうでしょう。

かい：㋓は BP＝CP，AP が共通で，90°の角が２組の辺の間にあるから，「２組の辺とその間の角」の合同条件がいえるんじゃないかな？

先　生：これは少し難しいのですが…。底辺BCの垂直二等分線が頂角Aを通ることは，明らかなのでしょうか。

まどか：ちゃんと通りますよ。「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を A する」という**性質**があるって習いましたもの。

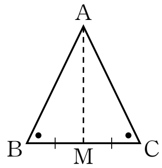
先　生：ところで，その**性質**は，どうやって導いたのですか。

まどか：それは，㋑の図で△ABD≡△ACD であることを証明して…。あっ，これも結論から導かれることを使ってしまう誤りになるんですね。

先　生：そうです。結果からいえば，底辺BCの垂直二等分線は確かに頂角Aを通ります。しかしながら，その根拠は㋑の図から導かれる「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を A する」ことの**逆**，つまり「二等辺三角形の底辺を A する直線は頂角Aの二等分線である」ことです。これらが両方とも成り立つことを前提としない限り，㋓の図で考えるのはおかしいですね。
それでは，次の問題も考えてみてください。

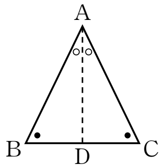
問題２　**∠B＝∠C である△ABCにおいて，AB＝AC であること，すなわち△ABCが二等辺三角形であることを，次の㋔～㋗の図をかいて証明することにした。**
㋔～㋗それぞれの図について，証明が可能か不可能かを答えよ。

㋔



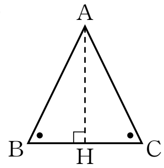
辺BCの中点をMとし，線分AMをひく。

㋕



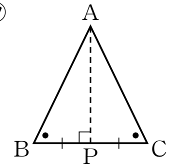
∠Aの二等分線をひき，辺BCとの交点をDとする。

㋖



頂点Aから辺BCに垂線をひき，辺BCとの交点をHとする。

㋗



辺BCの中点をPとし，Pを通る辺BCの垂線をひく。

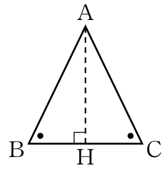
まどか：まず，㋔は三角形の合同条件がいえないから，証明［ エ ］だわ。

か　い：㋕は ∠B＝∠C，∠BAD＝∠CAD で 2 組の角が等しいから，残りの角について，∠ADB＝∠ADC がいえるね。AD は共通だから，［ E ］がそれぞれ等しいことがいえて，△ABD≡△ACD だ。よって，㋕は証明［ オ ］だよ。

あなた：㋖の図を使って証明をきちんと書いてみると，次のようになるね。

証明を完成させよう！

［証明］　右の図のように，頂点Aから辺BCに垂線をひき，辺BCとの交点をHとする。
△ABHと△ACHにおいて，



すなわち，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。よって，㋖は可能だ。

まどか：㋗は，やはり **問題１** の㋓と同様の理由でダメね。これは証明不可能だわ。

先　生：そうですね。問題文で「二等辺三角形の性質やその逆を使ってもよい」と認められていなければ，㋗を使って証明することは避けるべきですね。

考えてみよう！　会話を読んで，次の問いに答えよう。

① ［ ア ］～［ オ ］に「可能」または「不可能」いずれかの言葉をあてはめよう。

② ［ A ］～［ E ］にあてはまる性質や合同条件を書こう。

③ ［　　］に続きを書いて，証明を完成させよう。

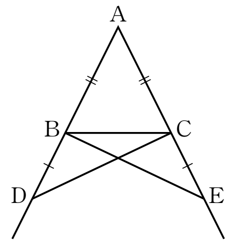
＜たすく先生の数学力向上ポイント＞

- **示したい事柄（結論）から導かれる事柄を使って証明を書くのは誤りになってしまう。どの事柄が仮定として使えるのかに注意。**
- **性質や定理をただ覚えるだけだと，それぞれの関連性がわからない。その性質や定理がどんな事柄から導かれるのかを意識して，日頃から学習に臨むこと。**

●放課後数学クラブ●　生活の中の数学を知ろう　4章　三角形と四角形

◆昔は大変だった「底角が等しいこと」の証明

紀元前300年頃の数学者ユークリッドは，著書『原論』の中で，「二等辺三角形の2つの底角が等しい」ことを次の流れで証明しています。



・AB＝AC である二等辺三角形ABCの辺AB，ACの延長線上に，BD＝CE となるような点D，Eをそれぞれとる。
・△ABE≡△ACD，△CBE≡△BCD であることを順に示す。
・∠ABC＝∠ACB を示す。

なぜ，このような面倒な方法をとっているのかというと，『原論』では**それまでにわかったことのみを使って証明を行う姿勢を徹底**していたためです。この時点では，「2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」という合同条件しか登場しておらず，「3組の辺がそれぞれ等しい」「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という合同条件や，中点および角の二等分線などの作図方法もまだ登場していませんでした。さあ，みなさんも上の流れで「∠ABC＝∠ACB」を証明してみましょう。

まずは，△ABE≡△ACD，△CBE≡△BCD となることについて，証明を書いてみてください。

証明を完成させよう！

［証明❶］　△ABE と△ACD において，

［証明❷］　△CBE と△BCD において，

△ABE≡△ACD, △CBE≡△BCD が証明できたら「∠ABC＝∠ACB」となることを右のように示せば終わりです。

現代では簡単に証明できることでも，初期の頃はとても苦労していました。すでに**整理された数学を学べるみなさんは，何百年もの歴史的な議論の積み重ね・くふうを短期間で学べる**ということですね。

合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，
△ABE≡△ACD より，∠ABE＝∠ ア 　……①
△CBE≡△BCD より，∠ イ ＝∠BCD 　……②
ここで，∠ABC＝∠ABE－∠ イ ，
　　　　∠ACB＝∠ ア －∠BCD だから，
①，②より，∠ABC＝∠ACB
したがって，AB＝AC ならば，∠ABC＝∠ACB である。 終

考えてみよう！　上の説明を読んで，次の問いに答えよう。

① 　❶，❷に続きを書いて，証明を完成させよう。
　ただし，使う合同条件は，「2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」のみとします。

② ア ， イ にあてはまる角を答えよう。