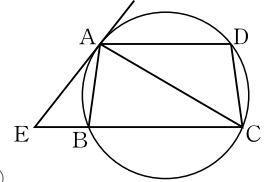


10 円の性質の利用 **3章 円**

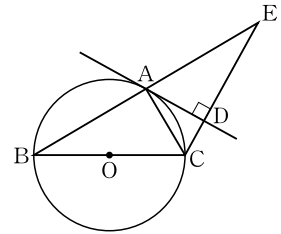
51 円と相似

右の図のように、 $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ が円に内接している。点 A における円の接線と辺 CB の延長との交点を E とする。このとき、 $\triangle AEB \sim \triangle ACD$ であることを証明せよ。

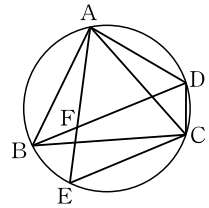


- 解** $\triangle AEB$ と $\triangle ACD$ において、
 AE は円の接線だから、接弦定理により、 $\angle EAB = \angle ACB$ ……①
 $AD \parallel BC$ より、平行線の錯角は等しいから、 $\angle ACB = \angle CAD$ ……②
 ①、②より、 $\angle EAB = \angle CAD$ ……③
 四角形 $ABCD$ は円に内接しているから、 $\angle ABE = \angle ADC$ ……④
 ③、④より、2組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle AEB \sim \triangle ACD$ **終**

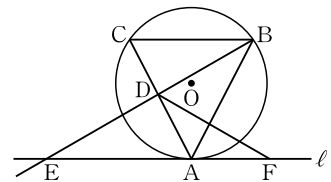
224 右の図のように、直径 BC を1辺とする $\triangle ABC$ が円 O に内接している。点 A における円 O の接線に C から垂線をひき、接線との交点を D 、辺 BA の延長との交点を E とする。このとき、 $\triangle ABC \sim \triangle DEA$ であることを証明せよ。



225 右の図のように、円に内接する $\triangle ABC$ がある。 $\angle ABC$ に対する \widehat{AC} 上に点 D を、 $\angle BAC$ に対する \widehat{BC} 上に点 E を $BD \parallel EC$ となるようにとり、 AE と BD の交点を F とする。このとき、 $\triangle ABF \sim \triangle ACD$ であることを証明せよ。

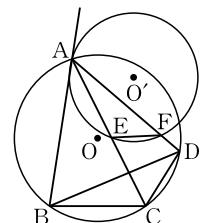


226 右の図のように、円 O に内接する鋭角三角形 ABC があり、点 A における接線 l は辺 BC に平行である。点 B を通り辺 AC に垂直な直線と、辺 AC 、接線 l との交点をそれぞれ D 、 E とする。接線 l 上にあり、 $DE = DF$ となる点 F とは異なる点を F とするとき、次の問いに答えよ。



- (1) $\triangle ABE \sim \triangle ADF$ であることを証明せよ。
- (2) $\angle ACB = 63^\circ$ のとき、 $\angle BDF$ の大きさを求めよ。

227 右の図のように、2つの円 O 、 O' があり、円 O は四角形 $ABCD$ の外接円、円 O' は点 A において直線 BA に接している。円 O' が線分 AC 、 AD と交わる点をそれぞれ E 、 F とするとき、 $\triangle AEF \sim \triangle BCD$ であることを証明せよ。

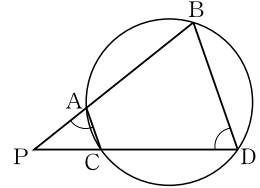
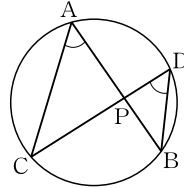


52 方べきの定理

円の2つの弦 AB, CD, またはそれらの延長が円周上にない点 P で交わるならば,
 $PA \times PB = PC \times PD$

〔証明〕 点 P が円の内部, 外部のいずれにある場合も, 同様に証明することができる。

$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において,
 $\angle CAP = \angle BDP, \angle APC = \angle DPB$
 2組の角がそれぞれ等しいから,
 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$
 よって, $PA : PD = PC : PB$
 ゆえに, $PA \times PB = PC \times PD$ **終**

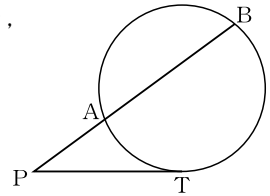


228 円の外部の点 P からこの円にひいた接線の接点を T とする。P を通り,

この円と 2 点 A, B で交わる直線をひくと,

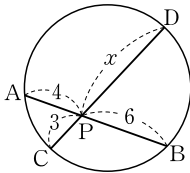
$$PT^2 = PA \times PB$$

が成り立つことを証明せよ。(これも, 方べきの定理である。)

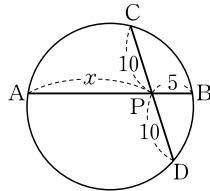


229 次の図で, x の値を求めよ。ただし, (5), (6)で, PT は円の接線である。

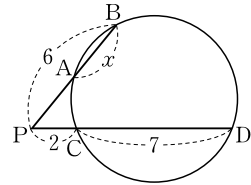
□(1)



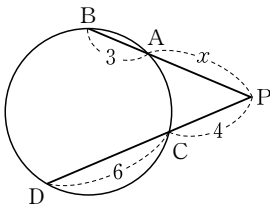
□(2)



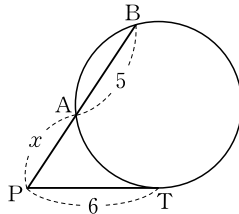
□(3)



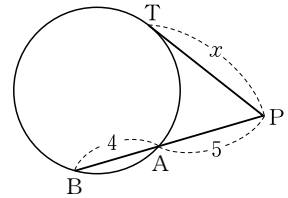
□(4)



□(5)

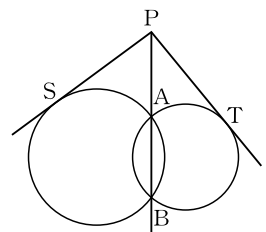


□(6)



230 右の図は, 2 点で交わる 2 つの円の共通な弦 AB の延長線上に点 P

をとり, P からそれぞれの円に接線 PS, PT をひいたものである。このとき, $PS = PT$ であることを証明せよ。



53 方べきの定理の逆

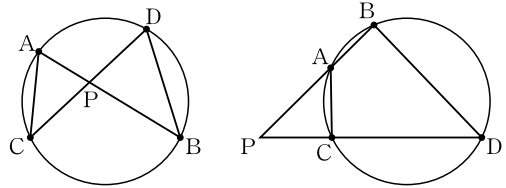
2つの線分 AB, CD, またはそれらの延長の交点を P とするとき、 $PA \times PB = PC \times PD$ ならば、4点 A, B, C, D は同一円周上にある。

〔証明〕 $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において、
 $PA \times PB = PC \times PD$ より、
 $PA : PD = PC : PB$

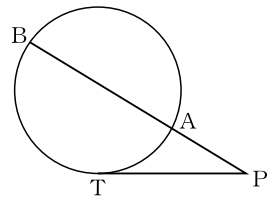
また、 $\angle APC = \angle DPB$

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$

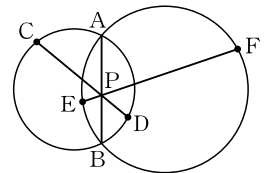
よって、 $\angle PAC = \angle PDB$ より、4点 A, B, C, D は同一円周上にある。 **終**



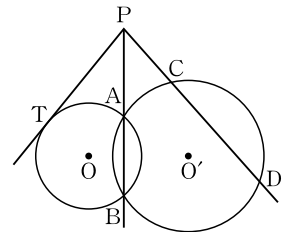
231 一直線上にない3点 A, B, T があり、直線 AB の延長線上の点 P から直線 PT をひくとき、 $PT^2 = PA \times PB$ ならば、PT は3点 A, B, T を通る円の接線であることを証明せよ。(これも、方べきの定理の逆である。)



232 2点 A, B で交わる2円がある。線分 AB 上に点 P をとり、点 P で交わる2円の弦をそれぞれ CD, EF とする。このとき、4点 C, D, E, F は同一円周上にあることを証明せよ。

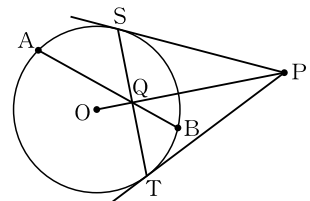


233 2点 A, B で交わる2つの円 O, O' がある。線分 AB の延長線上に点 P をとり、P から円 O に接線 PT をひき、円 O' と2点 C, D で交わる直線をひく。このとき、PT は3点 C, D, T を通る円の接線であることを証明せよ。



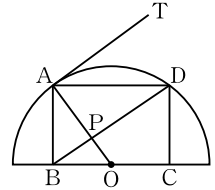
234 円 O の外部の点 P からこの円に接線 PS, PT をひき、弦 ST と線分 PO の交点を Q とする。また、点 Q を通る弦 AB をひく。

このとき、4点 A, B, O, P は同一円周上にあることを証明せよ。



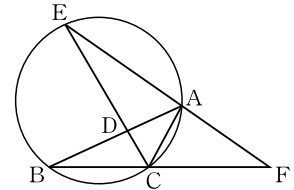
54 いろいろな問題

右の図のように、点Oを中心とする半円に長方形ABCDが内接している。
 点Aにおける半円Oの接線をAT，線分AO，BDの交点をPとする。
 AT//BDのとき，AB:ADを求めよ。



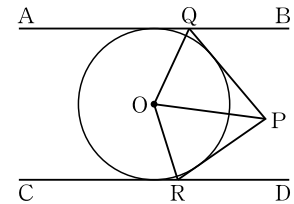
解 $\triangle ABO$ と $\triangle DAB$ において， $\angle ABO = \angle DAB = 90^\circ$ ……①
 AT//BD より， $\angle APB = \angle PAT = 90^\circ$ だから，
 $\angle BAO = 90^\circ - \angle ABD$ ， $\angle ADB = 90^\circ - \angle ABD$ より， $\angle BAO = \angle ADB$ ……②
 ①，②より，2組の角がそれぞれ等しいから， $\triangle ABO \sim \triangle DAB$
 よって， $AB : DA = BO : AB$
 ここで， $\triangle ABO \cong \triangle DCO$ より， $BO = CO$ なので，
 $AB = a$ ， $BO = b$ とすると， $DA = BC = 2b$ より， $a : 2b = b : a$ ， $a^2 = 2b^2$ ， $a = \sqrt{2}b$
 ゆえに， $AB : AD = a : 2b = \sqrt{2}b : 2b = \sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$

例235 $AB=7$ ， $BC=5$ ， $CA=3$ ， $\angle ACB=120^\circ$ の $\triangle ABC$ が円に内接している。 $\angle ACB$ の二等分線と辺AB，円との交点をそれぞれD，Eとし，直線EAと直線BCの交点をFとする。



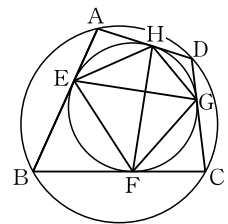
- (1) 線分ADの長さを求めよ。
- (2) $AF : BF$ を求めよ。
- (3) $CD \times DE$ を求めよ。
- (4) 線分AFの長さを求めよ。

例236 右の図のように，点Pは円Oの平行な2つの接線AB，CDの間にあり，円Oの外部にある。Pから円Oにひいた2つの接線とAB，CDとの交点をそれぞれQ，Rとする。



- (1) $\angle AQP + \angle QPR + \angle PRC$ は何度か。
- (2) $PO^2 = PQ \times PR$ であることを証明せよ。

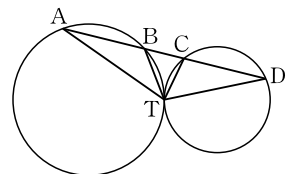
237 右の図のように，四角形ABCDが1つの円に内接し，同時に他の円に点E，F，G，Hで外接している。



- (1) $\angle EFH$ と大きさが等しい角を3つ書け。
- (2) $\angle BAD = x$ とするとき， $\angle EFH$ を x を用いて表せ。
- (3) $\angle BCD = y$ とするとき， $\angle FEG$ を y を用いて表せ。

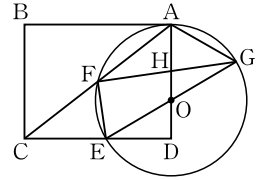
例 □(4) EGとFHの交点をPとするととき， $\angle EPH$ の大きさを求めよ。

例238 2つの角の和が 180° になるとき，その2つの角は補角をなすという。右の図のように，点Tで外接する2円とTを通らない直線との4つの交点をA，B，C，Dとする。このとき， $\angle ATD$ と $\angle BTC$ は補角をなすことを証明せよ。



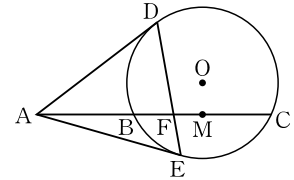
節 末 問 題

㉔239 右の図において、四角形 ABCD は $AB > AD$ の長方形である。辺 AD 上に点 O を $OA > OD$ となるようにとる。OA を半径とする円 O をかき、円 O と CD との交点を E、円 O と対角線 AC との交点を F とする。また、EO の延長と円 O との交点を G、OA と FG との交点を H とする。



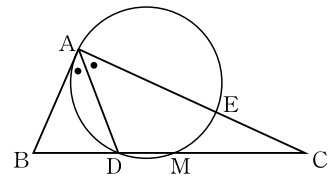
- (1) $\triangle CEF \sim \triangle GHA$ であることを証明せよ。
- (2) $\angle CEF = 84^\circ$, $\widehat{AF} : \widehat{FE} = 3 : 2$ のとき、 $\angle ECF$ の大きさを求めよ。

㉔240 右の図のように、円 O 外の点 A を通る直線と円 O の交点を B, C とし、点 A から円 O にひいた 2 本の接線の接点をそれぞれ D, E とする。BC と DE の交点を F とし、弦 BC の中点を M とする。

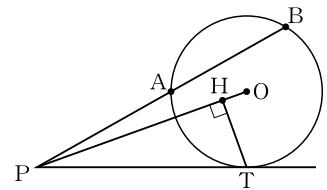


- (1) 5 点 O, D, A, E, M は同一円周上にあることを証明せよ。
- (2) $\triangle AFD \sim \triangle ADM$ であることを証明せよ。

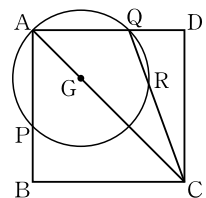
241 右の図のように、 $AB=5$, $BC=12$, $CA=11$ の $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D、3 点 A, D, M を通る円と辺 AC の交点を E とする。このとき、円の弦 AE の長さを求めよ。



㉔242 右の図のように、円 O の外部の点 P からこの円に 2 点 A, B で交わる直線と、点 T で接する接線をひく。また、T から直線 PO に垂線をひき、PO との交点を H とする。このとき、4 点 A, H, O, B は同一円周上にあることを証明せよ。



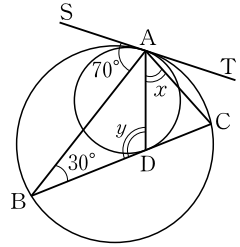
㉔243 右の図のように、1 辺の長さが 2 の正方形 ABCD がある。その対角線 AC 上に点 G をとる。G を中心として A を通る円が、AB と交わる点を P、AD と交わる点を Q、QC と交わる点を R とする。



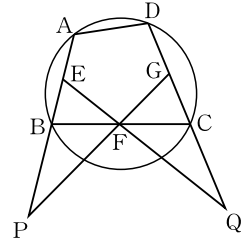
- (1) $\angle PRC$ の大きさを求めよ。
- (2) $\angle BRC = \angle DQC$ であることを証明せよ。
- (3) G が A を出発して AC の中点まで動くとき、R はある曲線をえがく。その曲線の長さを求めよ。

3章のハイレベル問題①

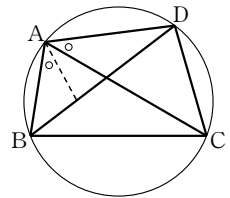
- ★ **244** 右の図で、直線 ST は点 A で大きい円と小さい円に接し、大きい円の弦 BC は点 D で小さい円に接している。 $\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めよ。



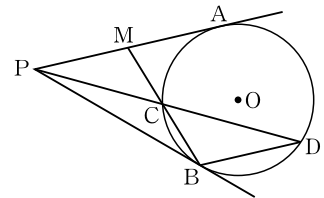
- ★ **245** 右の図のように、円に内接する四角形 $ABCD$ の辺 AB , BC , CD の中点をそれぞれ E , F , G とし、直線 AB と GF の交点を P , 直線 DC と EF の交点を Q とする。このとき、4点 E , P , Q , G は同一円周上にあることを証明せよ。



- ★ **246** 右の図のように、四角形 $ABCD$ が円に内接している。このとき、
 $\square AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$
 であることを証明せよ。(トレミーの定理)

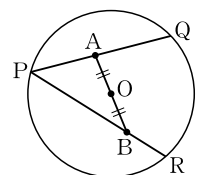


- ★ **247** 右の図のように、2直線 PA , PB が点 A , B で円 O に接している。線分 PA の中点を M とし、線分 BM と円 O との交点を C とする。また、直線 PC と円 O との交点のうち、 C 以外の点を D とする。



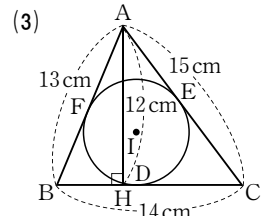
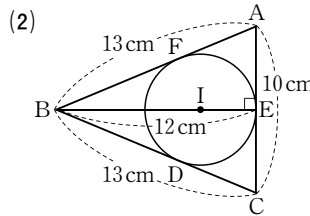
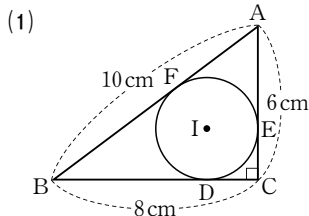
- $\square(1)$ 直線 AP は3点 P , C , B を通る円に接することを証明せよ。
 $\square(2)$ $PA \parallel BD$ であることを証明せよ。

- ★ **248** 右の図で、点 O は円の中心、2点 A , B は O に関して対称な位置にある円 O の内部の定点である。円周上の任意の点を P とし、直線 PA , PB と円 O との交点のうち、 P 以外の点をそれぞれ Q , R とする。
 このとき、 $AP \times AQ = BP \times BR$ であることを証明せよ。



●放課後数学クラブ● **数学力を身につけよう** 3章 円

問題1 次の図の△ABCにおいて、内心(内接円の中心)をI、辺BC, CA, ABと内接円との接点をそれぞれD, E, Fとする。また、(3)で頂点Aから辺BCにひいた垂線と辺BCとの交点をHとする。△ABCの内接円の半径を r cmとすると、 r の値をそれぞれ求めよ。



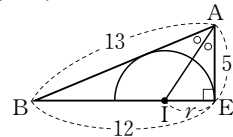
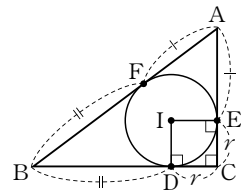
か い：(1)で内心Iと接点D, Eを結ぶと、 $ID=IE$ で、接点を通る円の半径は接線に垂直だから、四角形IDCEは□アになり、 $CD=CE=r$ cmと表せるね。

あなた：円外の1点から円にひいた接線の長さは等しいから、 $AF=AE=(\text{イ})$ cm, $BF=BD=(\text{ウ})$ cm
 $AF+BF=AB$ だから、 $(\text{イ})+(\text{ウ})=10$ より、 $r=(\text{エ})$ だよ。

先 生：円の接線の性質を上手に利用できていますね！(2)はどうですか？

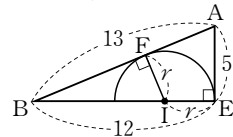


まどか：(2)は線対称な図形だから、△ABEで考えます。
 内心Iは∠Aの二等分線上にあるから角の二等分線の定理より、 $BI:IE=AB:5$ が成り立つわ。
 $IE=r$ cmだから、 $(\text{カ}):r=13:5$ より、 $r=(\text{キ})$ ね。



か い：角の二等分線の定理より、内心Iは線分BEを13:5に内分するから、比例式をつくらずに、 $r=\frac{\text{ク}}{13+5}BE=\frac{\text{ク}}{18}\times 12=(\text{キ})$ と求めてもいいね。
 ところで、(2)は相似な三角形を見つけても解けるんじゃないかな。

あなた：内心Iと接点Fを結ぶと、 $\triangle ABE\sim\triangle \text{ケ}$ となるから、 $AB:(\text{コ})=AE:IF$ だね。 $IF=IE=r$ cmだから、 $13:(\text{サ})=5:r$ より、 $r=(\text{キ})$ だね。



先 生：対称性に注目して、もとの図形の半分の形で考えるアイデアはいいですね！線対称な図形では、そのような発想が役に立つことも多いです。

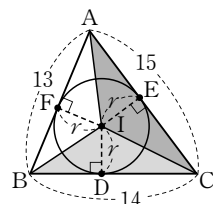
か い：(3)は直角三角形じゃないから(1)の方法はダメ、二等辺三角形でもないから(2)の方法も無理だね。垂線AHが内心Iを通らないと、(2)のようには解けないし。

先 生：少し難しいのでヒントです。△ABCの面積を r の式で表してみましょう。

まどか：右の図のように内心Iと頂点A, B, C, 接点D, E, Fをそれぞれ結ぶと、△ABCの面積は、

$$\frac{1}{2}\times BC\times ID=\frac{1}{2}\times 14\times r=(\text{シ})r(\text{cm}^2)$$

と表せるわ。



あなた：同様に考えると、 $\triangle ICA = \square{\text{ス}} r \text{ cm}^2$ 、 $\triangle IAB = \square{\text{セ}} r \text{ cm}^2$ となるから、
 $\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$
 $= \square{\text{シ}} r + \square{\text{ス}} r + \square{\text{セ}} r = \square{\text{ソ}} r (\text{cm}^2)$

一方、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = \square{\text{タ}}$ (cm^2)と求められるから、 $\square{\text{ソ}} r = \square{\text{タ}}$ より、 $r = \square{\text{チ}}$



か い：なるほど。この解法なら直角三角形や二等辺三角形でない三角形についても、面積さえわかれば内接円の半径が求められるんだね。

先 生：4章で三平方の定理を学べば、三角形の3辺の長さから高さや面積が求められるので、どんな三角形でも内接円の半径が求められるようになりますよ。

問題2 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ である $\triangle ABC$ の面積を S とすると、 $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を、 S , a , b , c を用いて表せ。

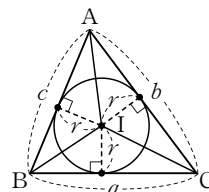


まどか：こういう問題がいきなり出てきたら難しいと思うけど、

問題1(3)のあとなら考えやすいわ。

か い：さっきの図で、14cmが a 、15cmが b 、13cmが c の場合だから、右のような図で考えればいいね。

あなた：**問題1**(3)と同じように考えると、 $\triangle ABC$ の面積は、



説明の続きを書こう！①

この等式を r について解くと、 $r = \square{\text{ツ}}$

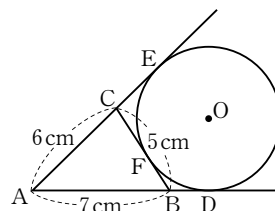


先 生：このように具体的な数でわかったことを文字に置き換えてみると、自分で公式を作ることができますし、公式を忘れても自力でいつでも導けますね。

問題3 右の図のように、円 O が $\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC の延長線と2点 D 、 E で、辺 BC と点 F で接している。

$AB=7\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $CA=6\text{cm}$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AD の長さを求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積が $6\sqrt{6}\text{ cm}^2$ になることを利用して、円 O の半径を求めよ。



先 生：円 O を $\triangle ABC$ の傍接円ほうせつといい、その中心 O を傍心ほうしんといいます。重心、垂心、内心、外心、傍心の5つを三角形の五心ごしんといたりしますよ。

か い：まずは(1)から。円外の1点から円にひいた接線の長さは等しいことから、 $AD=AE$, $BD=BF$, $CE = \square{\text{テ}}$ となることはすぐわかるんだけど…。

3章 円



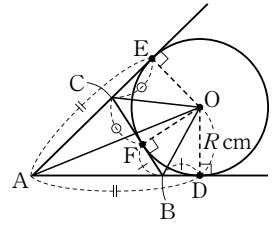
まどか：BD=BF, CE=□テ□より，次のようになるわ。

$$AD=AB+BD=AB+BF \quad \dots\dots\text{㉗}$$

$$AE=AC+CE=AC+\square\text{テ}\square \quad \dots\dots\text{㉘}$$

$$\begin{aligned} \text{あなた：}\text{㉗}+\text{㉘}\text{より，} AD+AE &= AB+(BF+\square\text{テ}\square)+AC \\ &= AB+\square\text{ト}\square+CA \end{aligned}$$

となるから， $AD=AE=x$ cm とすると，
 $x+x=7+5+6$ より， $x=\square\text{ナ}\square$ と求められるよ。



か い：すごい。AD, AE の長さの和が△ABCの□ニ□に等しくなるんだね。

先 生：(2)はちょっと難しいのでヒントです。円Oの半径をR cmとして，△ABCの面積をRの式で表してみましょう。

か い：問題1(3)に似たヒントですね。これも，△ABCの3辺をそれぞれ底辺として，円Oの半径Rを高さとする三角形の面積を考えたらいいのかな？



まどか：△OAB= $\frac{1}{2} \times AB \times OD = \frac{1}{2} \times 7 \times R = \square\text{ヌ}\square R(\text{cm}^2)$ と表せるから，同じように

考えると，△OBC=□ネ□ $R\text{cm}^2$ ，△OCA=□ノ□ $R\text{cm}^2$ になるわね。

あなた：△ABC=△OAB+△OCA-△OBC より，

☞ 説明の続きを書こう！②



となって，Rの値が求められました。

先 生：よくできました！ 一見違う問題に見えても，すでに解いた問題の解法を真似したり発展させたりすることで解けることもあります。このことを見ぬく力が応用力というやつですね。

☞ 考えてみよう！ 会話を読んで，次の問いに答えよう。

- ① □ア□～□ノ□にあてはまる言葉や数，式，三角形，線分などを答えよう。
- ② □ニ□①，②に続きを書いて，説明を完成させよう。
- ③ 問題3で， $BC=a$ ， $CA=b$ ， $AB=c$ ，△ABCの面積をSとします。ADの長さをx，円Oの半径をRとすると，x，Rをそれぞれa，b，c，Sを使って表してみよう。

<たすく先生の数学力向上ポイント>

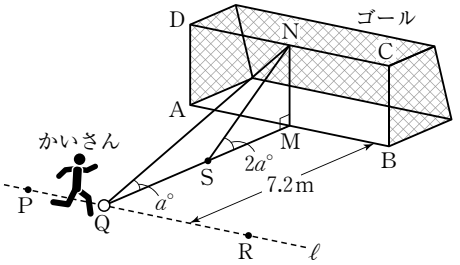
- ・線対称な図形では，対称性に注目すると見通しがよくなることもある。
- ・具体的な数で行っていた作業を文字に置き換えると，自分で公式を導ける。また，公式を忘れてもその場で作ることができる。
- ・未知の問題であっても，似たような問題の解法を真似したり発展させたりすると解決できることがある。これが応用力の養成につながる。



●放課後数学クラブ● **生活の中の数学を知ろう** 3章 円

◆どこからシュートを打つ？

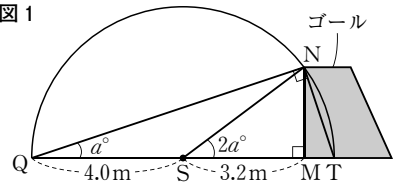
問題 正面が長方形のゴールABCDから7.2m離れた直線ℓ上で、かいさんがボールを蹴ろうとしている。M, Nはそれぞれ辺AB, CDの midpoint, 3点P, Q, Rは直線ℓ上の点, 点Sは線分QM上の点で, $QM \perp AB$ である。ボールの大きさやゴール枠の太さは考えないものとして, 次の問いに答えよ。



- (1) 点Qからまっすぐにボールを蹴るとき, 蹴る角度が a° 未満であればボールはゴールに入る。また, 点Qから4.0mゴールに近づいて, 点Sからまっすぐにボールを蹴るとき, 蹴る角度が $2a^\circ$ 未満であればボールはゴールに入る。ゴールの高さMNを求めよ。
- (2) 直線ℓ上からボールを蹴るとき, 点Pや点Rではなく, 点Qから蹴った方がボールがゴールに入りやすい。この理由を説明せよ。ただし, ボールを蹴る地点とゴールの両端のA, Bをそれぞれ結んでできる角度が大きいほどゴールに入りやすいものとする。

(1) ゴールを真横から見た, 右の図1で考えます。

図1



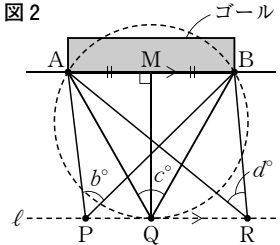
$\angle SNQ = 2a^\circ - a^\circ = a^\circ$ より, $SQ = SN$ となるから, 2点Q, Nは点Sを中心とする半径 mの円周上にあります。この円周とQSの延長線との交点をTとすると, $MT = ST - SM =$ (m)です。

また, $\angle QNM =$ $^\circ$, QTは直径だから, $\angle MNT = \angle QNT - \angle QNM =$ $^\circ$ となり, $\triangle QMN \sim \triangle$ がいえるので, $QM : NM = MN : MT$ が成り立ちます。

よって, $7.2 : NM = MN :$ これを解くと, $MN > 0$ より, $MN =$ mです。

(2) ゴールを上空から見た, 右の図2で考えます。

図2



$\angle APB = b^\circ$, $\angle AQB = c^\circ$, $\angle ARB = d^\circ$ とし, 2点A, Bを通り直線ℓに接する円をかくと, 直線ℓは点Qでこの円に接します。

点Qはこの円の円周上, 点Pは円外にあるので, $c >$

点Rも円外にあるので, $c >$

となり, 点Qからボールを蹴るときの角度 c° が最も大きくなるので, ゴールに最も入りやすいといえるのです。

👉 考えてみよう! 上の説明を読んで, 次の問いに答えよう。

① ~ にあてはまるものを答えよう。

② 右の図3で, $AB = 7.2m$, $BE = 2.4m$, $m \perp AE$ です。直線m上からボールを蹴るとき, ボールがゴールに最も入りやすい点をFとします。

EFの長さを求めてみよう。

図3

