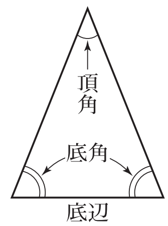
4章　三角形と四角形

●学習の要点●

1　定義　☞P93～

ことばの意味をはっきりと述べたものを**定義**という。例えば,「二等辺三角形」の定義は,「2辺が等しい三角形を二等辺三角形という。」となる。

2　二等辺三角形の性質　☞P93～



二等辺三角形で,長さの等しい2辺の間の角を**頂角**,頂角に向かい合う辺を**底辺**,底辺の両端の角を**底角**という。

(1)　二等辺三角形の2つの底角は等しい。

(2)　二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に2等分する。

3　二等辺三角形になるための条件　☞P93～

三角形の2角が等しければ,その三角形は等しい2角を底角とする二等辺三角形である。

4　逆と反例　☞P96～

ある事柄の仮定と結論を入れかえたものを,その事柄の**逆**という。ある事柄が成り立たない例を**反例**という。正しい事柄の逆はいつでも正しいとは限らない。

5　直角三角形の合同条件　☞P104～

2つの直角三角形は,次の条件のうち,どちらかが成り立てば合同である。

(1)　斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。　(2)　斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。

6　平行四辺形　☞P110～　※四角形の向かい合う辺を**対辺**,向かい合う角を**対角**という。

〔定義〕　2組の対辺がそれぞれ平行である四角形を平行四辺形という。

〔性質〕(1)　2組の対辺はそれぞれ等しい。　(2)　2組の対角はそれぞれ等しい。

(3)　対角線はそれぞれの中点で交わる。

7　平行四辺形になるための条件　☞P113～

四角形は,次の条件のうち,どれかが成り立てば平行四辺形である。

(1)　2組の対辺がそれぞれ平行である。(定義)　(2)　2組の対辺がそれぞれ等しい。

(3)　2組の対角がそれぞれ等しい。　(4)　対角線がそれぞれの中点で交わる。

(5)　1組の対辺が平行でその長さが等しい。

8　特別な平行四辺形　☞P117～

(1)　4つの角が等しい四角形を長方形という。長方形の対角線は等しい。

(2)　4つの辺が等しい四角形をひし形という。ひし形の対角線は垂直に交わる。

(3)　4つの角が等しく,4つの辺が等しい四角形を正方形という。

正方形は,長方形とひし形の両方の性質をもっている。

9　平行線と面積　☞P122～

(1)　底辺を共有し,底辺に平行な直線上に頂点をもつ2つの三角形の面積は等しい。

(2)　$\triangle$ABCと$\triangle$DEFの面積が等しいとき,$\triangle ABC=\triangle DEF$と書く。

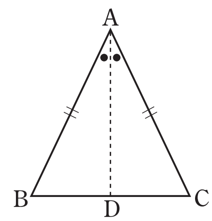
⑪ 二等辺三角形

▶練習問題 ⇨ P102

学習の基本 53 二等辺三角形の性質

定義　2辺が等しい三角形を**二等辺三角形**という。

問題　**「二等辺三角形の底角は等しい。」このことを下のように証明した。下線部をうめよ。**



解　頂角の二等分線をひき，三角形の合同を利用して証明する。

AB＝AC である△ABCで，頂角∠Aの二等分線をひき，底辺BCとの交点をDとする。△＿＿＿＿と△＿＿＿＿において，

仮定から，AB＝AC……①，共通な辺だから，＿＿＿＿＝＿＿＿＿……②

ADは∠Aの二等分線だから，∠＿＿＿＿＝∠＿＿＿＿……③

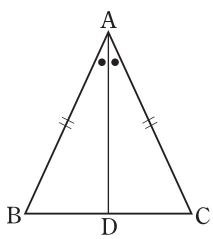
①，②，③より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△＿＿＿＿≡△＿＿＿＿

合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，∠B＝∠C　終

答　△ABDと△ACD，AD＝AD，∠BAD＝∠CAD，△ABD≡△ACD

234「二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に2等分する。」

このことを証明せよ。ただし，AB＝AC である△ABCで，頂角∠Aの二等分線をひき，底辺BCとの交点をDとする。



＿＿＿＿と＿＿＿＿において，

仮定から，AB＝AC…①，＿＿＿＿は共通…②，

ADは∠Aの二等分線だから，

＿＿＿＿＝＿＿＿＿…③

①，②，③より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，＿＿＿＿≡＿＿＿＿

合同な図形の対応する辺の長さと角の大きさは等しいから，BD＝＿＿＿＿…④，

∠ADB＝＿＿＿＿…⑤

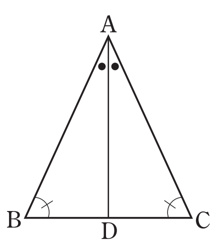
一方，∠ADB＋＿＿＿＿＝180°…⑥

⑤，⑥より，∠ADB＝∠ADC＝＿＿＿＿°…⑦

④，⑦より，二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に2等分する。　終

235「2角が等しい三角形の2辺は等しい。」

このことを証明せよ。ただし，∠B＝∠C である△ABCで，∠Aの二等分線をひき，辺BCとの交点をDとする。



＿＿＿＿と＿＿＿＿において，仮定より，

∠B＝∠C…①，ADは∠Aの二等分線だから，

＿＿＿＿＝＿＿＿＿…②

①，②と三角形の内角の和が180°だから，

＿＿＿＿＝＿＿＿＿…③

また，＿＿＿＿は共通…④

②，③，④より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，＿＿＿＿≡＿＿＿＿

合同な図形の対応する辺の長さは等しいから，

＿＿＿＿＝＿＿＿＿　終

4章

学習の基本 54 二等辺三角形の角

⑴　二等辺三角形の性質

①　二等辺三角形の底角は等しい。（図１）

②　二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分する。（図２）

⑵　正三角形の性質

①　正三角形の３つの角は等しい。（図３）

図１

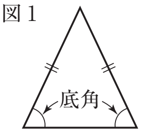


図２

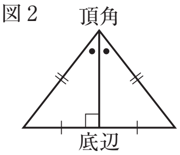
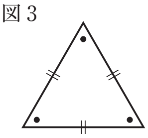
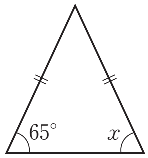


図３

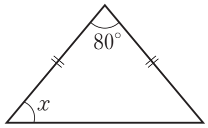


問題　**次の図で，同じ印をつけた辺の長さが等しいとき，∠xの大きさを求めよ。**

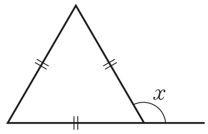
⑴



⑵



⑶



解　⑴二等辺三角形の底角は等しいから，∠x＝65°

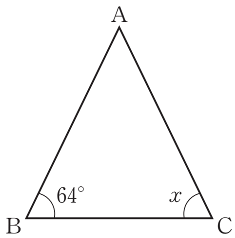
⑵∠x＝(180°－80°)÷2＝50°

⑶正三角形の１つの角は60°だから，∠x＝180°－60°＝120°

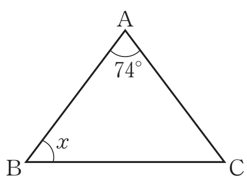
答　⑴　65°　　⑵　50°　　⑶　120°

236 次の図で，AB＝AC であるとき，∠xの大きさを求めよ。

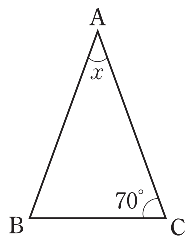
□⑴



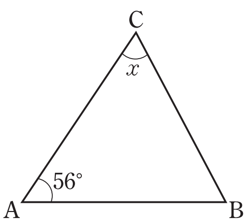
□⑵



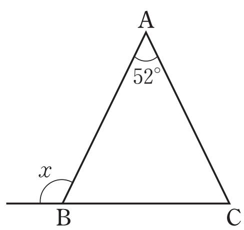
□⑶



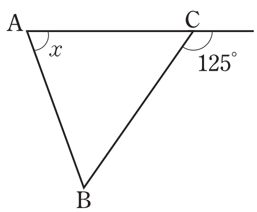
□⑷



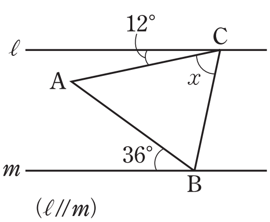
□⑸



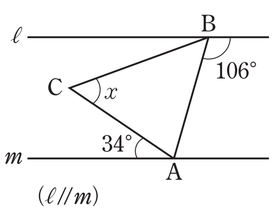
□⑹



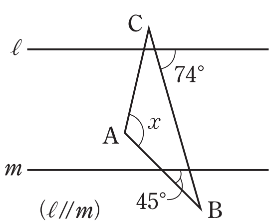
□⑺



□⑻

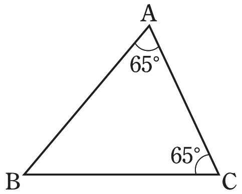


□⑼

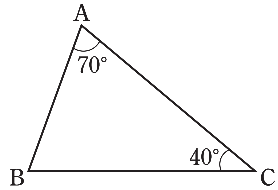


237 次の図で，長さの等しい線分を答えよ。

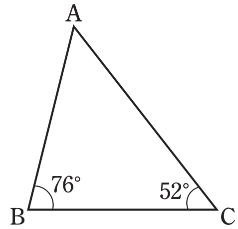
□(1)



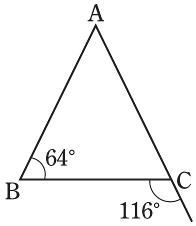
□(2)



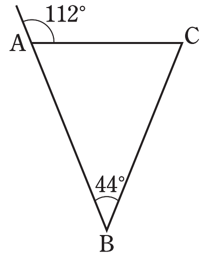
□(3)



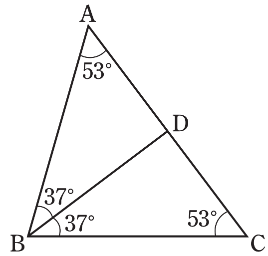
□(4)



□(5)

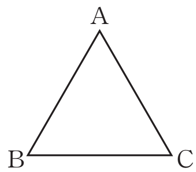


応 □(6)



学習の基本 55 正三角形

定義　3 辺が等しい三角形を**正三角形**という。



定理　正三角形には，次の性質がある。

(1)　正三角形の 3 つの内角は等しく，すべて60°である。

(2)　3 つの内角が等しい三角形は正三角形である。

(1)が成り立つことの証明

△ABC が正三角形であるとき，
AB=BC より，∠A=∠C
BC=CA より，∠B=∠A
よって，∠A=∠B=∠C
三角形の内角の和は180°だから，
∠A=∠B=∠C=180°÷3=60°　終

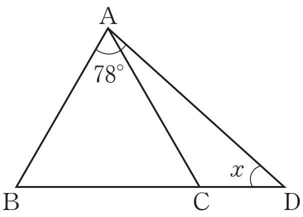
(2)が成り立つことの証明

△ABC において，∠A=∠B=∠C
であるとき，
∠A=∠Bより，CA=BC
∠B=∠Cより，AB=CA
よって，AB=BC=CA だから，
△ABC は正三角形である。　終

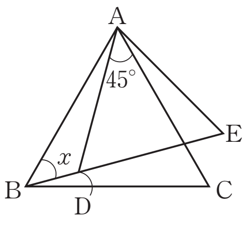
〔注〕　正三角形は二等辺三角形の特別な場合であり，二等辺三角形の性質をすべてもっている。

238 次の図で，△ABC は正三角形である。∠x の大きさを求めよ。

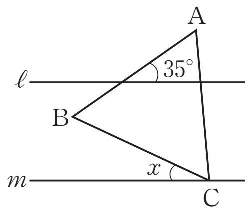
□(1)



□(2)　△ADE は正三角形



□(3)　$\ell /\!/ m$



学習の基本 56 逆と反例

① ある事柄の仮定と結論を入れかえたものを，その事柄の**逆**という。
② ある事柄が成り立たない例を**反例**という。正しい事柄の逆はいつでも正しいとは限らない。
③ 正しくないことを示すには，反例(具体例)を１つ示せばよい。

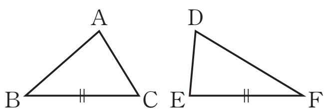
問題 **次の事柄の逆をいえ。また，それが正しいかどうかもいえ。さらに，逆が正しくないときは，反例を１つ示せ。**

⑴ 自然数 a，b で，a も b も奇数ならば，ab は奇数である。
⑵ △ABC≡△DEF ならば，BC＝EF である。

解 ⑴この事柄の仮定は，a も b も奇数，結論は，ab は奇数である。
⑵この事柄の仮定は，△ABC≡△DEF，結論は，BC＝EF である。

答 ⑴ 自然数 a，b で，ab が奇数ならば，a も b も奇数である。…正しい。
⑵ BC＝EF ならば，△ABC≡△DEF である。…正しくない。
反例…下の図のような場合である。

合同な三角形かどうかを調べるには，合同条件が成り立つかを調べればよい。



(BC＝EF であるが，AB≒DE なので，△ABC≡△DEF ではない。)

239 次の事柄の逆をいえ。また，それが正しいかどうかもいえ。さらに，逆が正しくないときは，反例を１つ示せ。

□⑴ 自然数 a，b について，a も b も偶数ならば，ab は偶数である。

□⑵ $x \geqq 10$ ならば，$x > 8$ である。

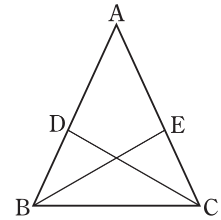
□⑶ ２つの数 a，b で，a も b も正の数ならば，$ab > 0$ である。

応 □⑷ △ABC≡△DEF ならば，∠A＝∠D である。

応 □⑸ △ABC で，∠A＋∠B＝90° ならば，∠C＝90° である。

学習の基本 57 二等辺三角形と証明

問題 **右の図のように，AB＝AC である二等辺三角形ABCの辺AB上に点Dを，辺AC上に点Eを，BD＝CE となるようにとる。このとき，△BCD≡△CBE であることを下のように証明した。下線部をうめよ。**

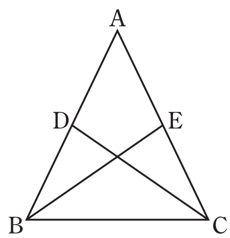


解 AB＝AC より，∠ABC＝∠ACB であることを利用して，△BCD≡△CBE であることを導く。

△_______と△_______において，
共通な辺だから，BC＝CB　……①
仮定から，_____＝_____　……②
△ABCは AB＝AC の二等辺三角形だから，∠_____＝∠_____　……③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
△_______≡△_______ 終

答 △BCD と△CBE，BD＝CE，∠DBC＝∠ECB，△BCD≡△CBE

240 下の図のように，AB＝AC である二等辺三角形ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとする。このとき，∠AEB＝∠ADC であることを証明したい。

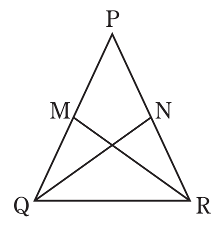


_______と_______において，
仮定から，_____＝_____　……①
点E，Dはそれぞれ辺AC，ABの中点だから，_____＝_____　……②
また，_____は共通　……③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，
_______≡_______
合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，_______＝_______ 終

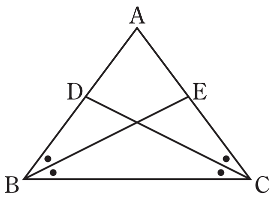
□(1)　どの 2 つの三角形の合同をいえばよいか。

□(2)　このことを証明せよ。

応 **241** 右の図のように，PQ＝PR である二等辺三角形PQRの辺PQ，PRの中点をそれぞれM，Nとする。このとき，△PMR≡△PNQ であることを証明せよ。

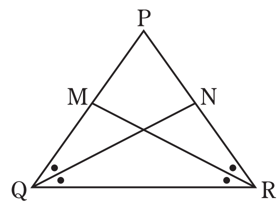


242 下の図のような，AB＝AC である二等辺三角形ABC で，∠B，∠C の二等分線をそれぞれBE，CD とする。このとき，BE＝CD であることを証明せよ。

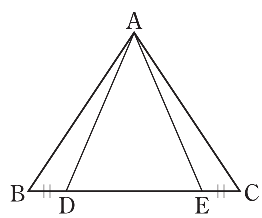


△BCE と△CBD において，
共通な辺だから，＿＿＿＝＿＿＿　…①
△ABC は，AC＝AB の二等辺三角形だから，
＿＿＿＿＿＝＿＿＿＿＿　…②
また，BE，CD はそれぞれ∠B，∠C の二等分線だから，
＿＿＿＿＿＝＿＿＿＿＿　…③
①，②，③より，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，
＿＿＿＿＿≡＿＿＿＿＿
合同な図形の対応する辺の長さは等しいから，＿＿＿＝＿＿＿　終

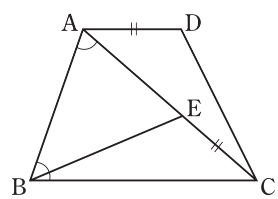
243 右の図のような，PQ＝PR である二等辺三角形PQR で，∠Q, ∠R の二等分線をそれぞれQN, RM とする。このとき，MQ＝NR であることを証明せよ。



244 右の図の△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。辺BC 上に BD＝CE となる２点D，E をとるとき，AD＝AE であることを証明せよ。

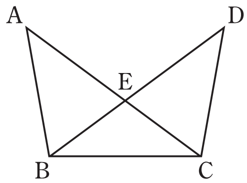


応 **245** 右の図は，AD∥BC の台形ABCD で，∠CAB＝∠CBA である。対角線AC 上に AD＝CE となるように点E をとるとき，CD＝BE であることを証明せよ。



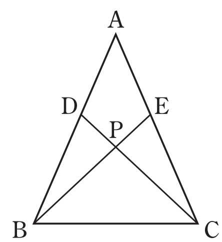
246 下の図で，ACとDBの交点をEとする。

このとき，AB＝DC，AC＝DBならば，△EBCは二等辺三角形であることを証明せよ。

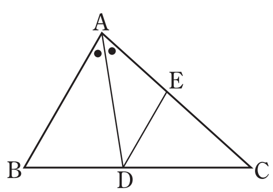


＿＿＿＿と＿＿＿＿において，
仮定から，AB＝＿＿＿…①，AC＝＿＿＿…②，
共通な辺だから，＿＿＝＿＿…③
①，②，③より，3組の辺がそれぞれ等しいから，
＿＿＿＿≡＿＿＿＿
合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿
すなわち，＿＿＿＿＝＿＿＿＿
よって，2つの角が等しいから，△EBCは二等辺三角形である。　終

応 247 右の図のように，AB＝ACである二等辺三角形ABCの辺AB上に点D，辺AC上に点Eを，BD＝CEとなるようにとる。線分BEとCDの交点をPとするとき，△PBCは二等辺三角形であることを証明せよ。

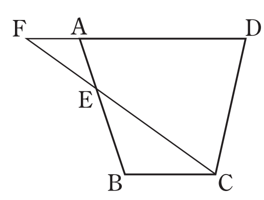


248 下の図のように，△ABCの∠BACの二等分線が辺BCと交わる点をDとし，Dを通り辺BAに平行な直線が辺ACと交わる点をEとすると，△ADEは二等辺三角形であることを証明せよ。



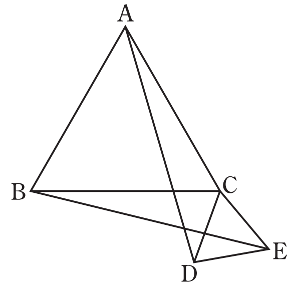
ADは∠BACの二等分線だから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……①
BA∥DEより，平行線の錯角は等しいから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……②
①，②より，＿＿＿＿＝＿＿＿＿
よって，2つの角が等しいから，△ADEは二等辺三角形である。　終

応 249 右の図のように，AD∥BCである台形ABCDの辺AB上に，BC＝BEとなるように点Eをとり，線分CEの延長と辺DAの延長の交点をFとする。このとき，AE＝AFであることを証明せよ。



学習の基本 58 正三角形の性質の利用

問題 **右の図で，△ABC，△CDEはともに正三角形である。このとき，△ACD≡△BCEであることを下のように証明した。下線部をうめよ。**

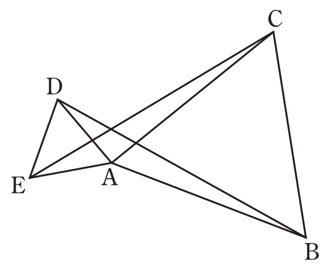


解　2つの正三角形の3辺はそれぞれ等しく，正三角形の1つの内角は60°であることを利用する。

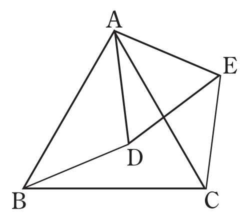
△＿＿＿＿と△＿＿＿＿において，
△ABC，△CDEは正三角形だから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……①，＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……②
正三角形の1つの内角は60°だから，
∠＿＿＿＿＝60°＋∠BCD　……③，∠＿＿＿＿＝∠BCD＋60°　……④
③，④より，∠＿＿＿＿＝∠＿＿＿＿　……⑤
①，②，⑤より，＿＿＿＿＿＿＿＿がそれぞれ等しいから，
△＿＿＿＿≡△＿＿＿＿　**終**

答　△ACDと△BCE，AC＝BC，CD＝CE，∠ACD，∠BCE，∠ACD＝∠BCE，2組の辺とその間の角，△ACD≡△BCE

250 □ 右の図で，△ABC，△ADEはともに正三角形である。
このとき，
△ABD≡△ACE
であることを証明せよ。

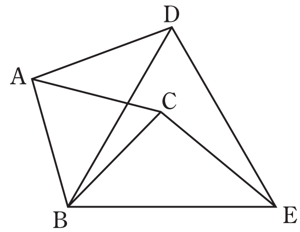


応 **251** □ 右の図で，△ABCと△ADEはともに正三角形である。
このとき，BD＝CEであることを証明せよ。

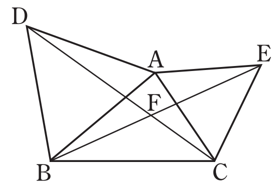


＿＿＿＿と＿＿＿＿において，
△ABC，△ADEは正三角形だから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……①，＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……②
正三角形の1つの内角は60°だから，
＿＿＿＿＝60°－∠DAC…③，＿＿＿＿＝60°－∠DAC…④
③，④より，＿＿＿＿＝＿＿＿＿　……⑤
①，②，⑤より，＿＿＿＿＿＿＿＿がそれぞれ等しいから，
＿＿＿＿≡＿＿＿＿
合同な図形の対応する＿＿＿の長さは等しいから，
＿＿＿＿＝＿＿＿＿　**終**

252 右の図で，△ABCと△BEDはともに正三角形である。
□ このとき，AD＝CEであることを証明せよ。



応 **253** 右の図は，△ABCの辺ABを1辺とする正三角形ABDと，辺ACを1辺とする正三角形ACEを，△ABCの外側に作ったものである。このとき，次の問いに答えよ。



□(1) ∠ABE＝∠ADCであることを証明せよ。

＿＿＿＿と＿＿＿＿において，
△ABD，△ACEは正三角形だから，
＿＿＝＿＿　……①，＿＿＝＿＿　……②
正三角形の1つの内角は60°だから，
＿＿＿＿＝∠BAC＋60°　……③
＿＿＿＿＝60°＋∠BAC　……④
③，④より，＿＿＝＿＿　……⑤
①，②，⑤より，＿＿＿＿＿＿がそれぞれ等しいから，＿＿≡＿＿
合同な図形の対応する＿＿の大きさは等しいから，
＿＿＝＿＿　終

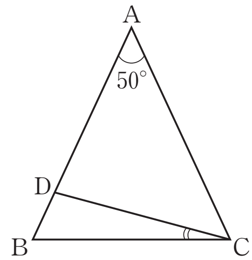
□(2) 右上の図のように，線分BEとDCの交点をFとする。このとき，∠BFC＝120°であることを次のように証明した。
この証明を完成せよ。

(1)より，∠ABF＝＿＿＿＿だから，
∠BFC＝∠DBF＋∠BDF
＝∠DBA＋＿＿＿＿＋∠BDF
＝∠DBA＋＿＿＿＿＋∠BDF
＝∠DBA＋＿＿＿＿
よって，∠BFC＝60°＋＿＿°
＝＿＿°　終

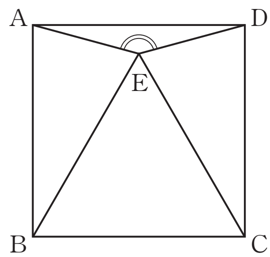
練習問題　　11　二等辺三角形

254 次の問いに答えよ。

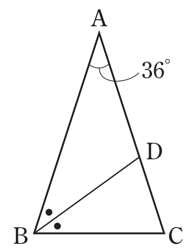
□(1)　右の図で，AB＝AC，AD＝CD であるとき，∠BCDの大きさを求めよ。



□(2)　右の図で，四角形ABCDは正方形，△EBCは正三角形である。∠AEDの大きさを求めよ。



応 **255** 頂角が∠A＝36° の二等辺三角形ABCにおいて，∠Bの二等分線が辺ACと交わる点をDとする。このとき，次の問いに答えよ。



□(1)　∠BCD，∠CBD，∠BDCの大きさはそれぞれ何度か。

□(2)　辺BCと長さが等しい線分をすべて答えよ。

256 次の事柄の逆をいえ。また，それが正しいかどうかもいえ。さらに，逆が正しくないときは，反例を１つ示せ。

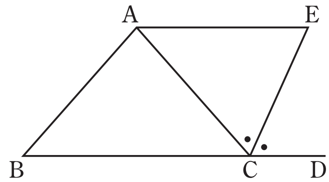
□(1)　a も b も自然数ならば，$a+b$ は自然数である。

□(2)　△ABCで，AB＝AC ならば，∠B＝∠C である。

□(3)　△ABC≡△DEF ならば，∠A＝∠D，∠B＝∠E，∠C＝∠F

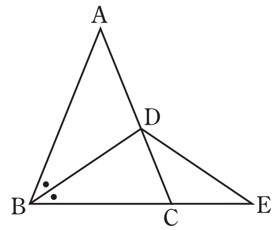
応 □(4)　△ABC≡△DEF ならば，△ABCと△DEFの面積は等しい。

応 **257** 右の図で，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。
□いま，∠ACD の二等分線と，頂点Aを通り辺BC に平行な直線との交点をEとすると，AB＝AE であることを証明せよ。

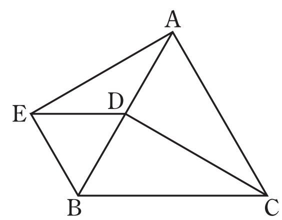


応 **258** 右の図のような，AB＝AC の二等辺三角形で，∠ABC
□の二等分線が辺AC と交わる点をDとし，辺BC の延長上に点Eを CE＝CD となるようにとる。

このとき，△DBE は二等辺三角形であることを証明せよ。



259 右の図のように，正三角形ABC の辺AB 上に点Dをとり，正三角形BDE を作る。このとき，AE＝CD となる。これについて，次の問いに答えよ。

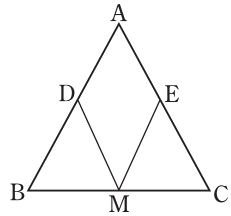


□(1)　これを証明するには，どの三角形とどの三角形の合同をいえばよいか。

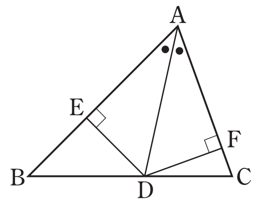
□(2)　このことを証明せよ。

4章の確認問題

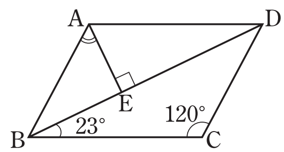
341 二等辺三角形の性質　右の図のように，AB＝AC である二等辺三角形ABCの底辺BCの中点をMとし，辺AB，AC上に AD＝AE となるようにそれぞれ点D，Eをとる。このとき，MD＝ME であることを証明せよ。



342 直角三角形の合同条件　右の図のように，△ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとし，Dから辺AB，ACにそれぞれ垂線DE, DFをひく。このとき, DE＝DF であることを証明せよ。

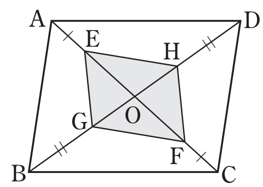


343 平行四辺形の性質　右の図の▱ABCDで，AE⊥BD，∠DBC＝23°，∠BCD＝120° のとき，∠BAEの大きさを求めよ。



344 平行四辺形になるための条件　右の図のように，▱ABCDの対角線の交点をOとし，対角線AC，BD上にそれぞれ AE＝CF，BG＝DH となる点E，F，G，Hをとる。

このとき，四角形EGFHは平行四辺形であることを証明せよ。



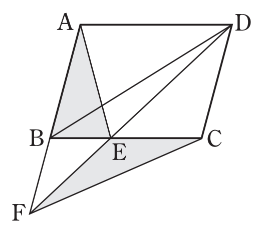
345 特別な平行四辺形　次の(1)〜(6)は，それぞれどんな四角形になるか。

□(1)　AB＝BC である▱ABCD　　□(2)　AC＝BDである▱ABCD

□(3)　AC＝BD，AC⊥BD である▱ABCD　　□(4)　∠A＝∠B である▱ABCD

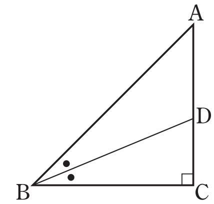
□(5)　∠ABD＝∠CBD である▱ABCD　　□(6)　∠A＝90°，AB＝BC である▱ABCD

346 平行線と面積　右の図のように，▱ABCDの辺BC上に点Eをとり，辺ABの延長と線分DEの延長との交点をFとする。このとき，△ABE＝△EFC であることを証明せよ。



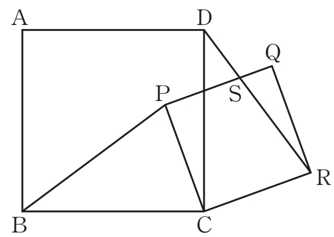
4章の応用問題

★ **347** $\angle C=90^\circ$ の直角二等辺三角形ABCの$\angle B$の二等分線と辺AC
□との交点をDとするとき，BC＋CD＝AB であることを証明せよ。



★ **348** 右の図のように，正方形ABCDの内部に点Pをとり，線分CPを1辺とする正方形CPQRを，辺PQと辺CDが交わるように作る。また，辺PQと線分DRの交点をSとする。

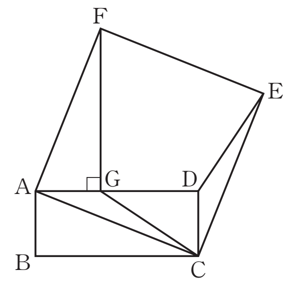
次の問いに答えよ。



□(1)　△BPC≡△DRC であることを証明せよ。

□(2)　BC＝8cm，CP＝5cm，△BPCの面積が18cm^2のとき，△DPQの面積を求めよ。

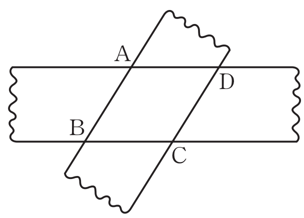
349 右の図の四角形ABCDは長方形で，四角形ACEFは正方形である。また，点Fから辺ADに垂線FGをひく。次の問いに答えよ。



□(1)　△ABC≡△AGF であることを証明せよ。

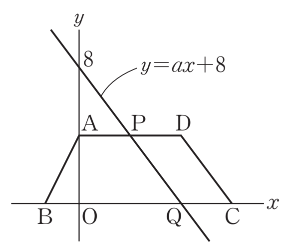
□(2)　AB＝4cm，BC＝10cm のとき，四角形FGDEの面積を求めよ。

★★ **350** 右の図のように，同じ幅の紙テープが重なってできる四角
□形ABCDはひし形になることを証明せよ。



★ **351** 座標平面上に，4点A(0, 4)，B(−2, 0)，C(9, 0)，D(6, 4)
□を頂点とする台形ABCDがある。また，直線 $y=ax+8$ と辺AD，BCとの交点をそれぞれP，Qとする。

面積の比が，台形ABQP：台形PQCD＝2：1 のとき，a の値を求めよ。ただし，$a\leqq-\dfrac{8}{9}$ とする。



●放課後数学クラブ●　数学力を身につけよう　4章　三角形と四角形

先　生：「2辺が等しい三角形は二等辺三角形である」ことは**定義**なので，そのまま受け入れるとして，二等辺三角形の**性質**である「2つの底角は等しい」ことや「頂角の二等分線は底辺を $\boxed{\quad\text{A}\quad}$ する」ことについて，なぜそれが成り立つのかを考えてみることにしましょう。

か　い：小学校では二等辺三角形の紙を半分に折ったとき，それがぴったり重なるから2つの角の大きさが等しいと考えたと思います。

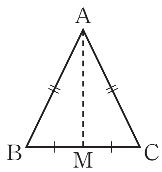
まどか：「三角形の内角の和が180°になること」もそうだったけど，実験的に得られた結果は，たまたまそうなっただけかもしれないから，どんな二等辺三角形でもそれが成り立つことを証明しないとダメということですよね，先生。

先　生：さすが，まどかさん。言いたいことをズバリ言われてしまった！　まさしくその通りです。では，次のような問題を考えてみましょう。

問題1　**AB＝ACである二等辺三角形ABCにおいて，∠B＝∠Cであること，すなわち2つの底角が等しいことを，次の㋐〜㋓の図をかいて証明することにした。**

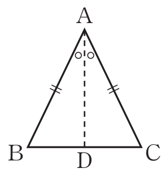
㋐〜㋓のそれぞれの図について，証明が可能か不可能かを答えよ。

㋐



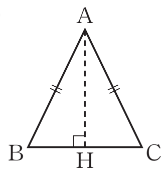
辺BCの中点をMとし，線分AMをひく。

㋑



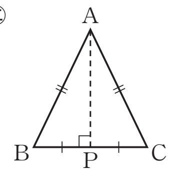
∠Aの二等分線をひき，辺BCとの交点をDとする。

㋒



頂点Aから辺BCに垂線をひき，辺BCとの交点をHとする。

㋓



辺BCの中点をPとし，Pを通る辺BCの垂線をひく。

か　い：証明させるのではなく，証明できるかどうかを聞くなんて面白い問題だ。合同な図形の対応する角の大きさが等しいことから，∠B＝∠Cを示せばいいから，㋐だと，△ABM≡△ACMを証明できればいいんだよね。

まどか：㋐の場合は $\boxed{\quad\text{B}\quad}$ がそれぞれ等しいから，△ABM≡△ACMがいえるわ。つまり，㋐は証明 $\boxed{\text{ア}}$ よね。

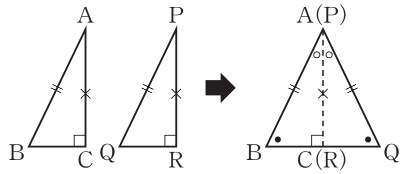
あなた：㋑の場合は $\boxed{\quad\text{C}\quad}$ がそれぞれ等しいから，△ABD≡△ACDがいえるよね。よって，㋑は証明 $\boxed{\text{イ}}$ だよ。

か　い：㋒はどうかな？　図からは，AB＝AC，AHが共通，∠AHB＝∠AHC＝90°であることがわかるけど，これは三角形の合同条件にあてはまらないんじゃないかな。90°の角は2組の辺の間にある角じゃないし。

まどか：でも㋒は，直角三角形の $\boxed{\quad\text{D}\quad}$ がそれぞれ等しいから，△ABH≡△ACHといえるんじゃないかしら。だから，㋒は証明可能だと思うのだけど。

先　生：ちょっと待って下さい。そもそも「$\boxed{\quad\text{D}\quad}$ がそれぞれ等しい2つの直角三角形は合同である」といえるのは，なぜですか？

かい：例えば，∠ACB＝∠PRQ＝90°，AB＝PQ, AC＝PR である２つの直角三角形について，△ABC≡△PQR であることを示すには，右のように２つの三角形をくっつけた図をかいて…。



まどか：AB＝AQ より∠ABC＝∠AQR，残りの角についても ∠BAC＝∠QAC となるから，「１組の辺とその両端の角」か「２組の辺とその間の角」という合同条件を使えば…。あっ，AB＝PQ より ∠ABC＝∠PQR の部分はダメですね。

あなた：「[D]がそれぞれ等しい２つの直角三角形は合同である」ことの根拠として，「二等辺三角形の２つの底角が等しい」ことを使ってしまっているから，㋒は証明[ウ]ということになるよ。

先　生：そうですね。**証明すべき事柄から導かれる内容を先に使ってしまうのはよくない**ですね。さて，㋓はどうでしょう。

か　い：㋓はBP＝CP，APが共通で，90°の角が２組の辺の間にあるから，「２組の辺とその間の角」の合同条件がいえるんじゃないかな？

先　生：これは少し難しいのですが…。底辺BCの垂直二等分線が頂角Aを通ることは，明らかなのでしょうか。

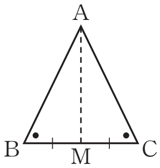
まどか：ちゃんと通りますよ。「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を[A]する」という**性質**があるって習いましたもの。

先　生：ところで，その**性質**は，どうやって導いたのですか。

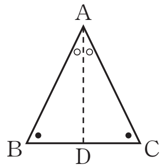
まどか：それは，㋑の図で△ABD≡△ACD であることを証明して…。あっ，これも結論から導かれることを使ってしまう誤りになるんですね。

先　生：そうです。結果からいえば，底辺BCの垂直二等分線は確かに頂角Aを通ります。しかしながら，その根拠は㋑の図から導かれる「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を[A]する」ことの**逆**，つまり「二等辺三角形の底辺を[A]する直線は頂角Aの二等分線である」ことです。これらが両方とも成り立つことを前提としない限り，㋓の図で考えるのはおかしいですね。
それでは，次の問題も考えてみてください。

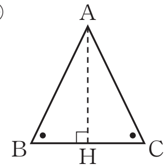
問題２　**∠B＝∠C である△ABCにおいて，AB＝AC であること，すなわち△ABCが二等辺三角形であることを，次の㋔～㋗の図をかいて証明することにした。**
㋔～㋗それぞれの図について，証明が可能か不可能かを答えよ。

㋔


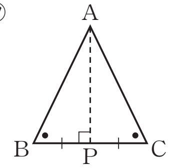
辺BCの中点をMとし，線分AMをひく。

㋕


∠Aの二等分線をひき，辺BCとの交点をDとする。

㋖


頂点Aから辺BCに垂線をひき，辺BCとの交点をHとする。

㋗


辺BCの中点をPとし，Pを通る辺BCの垂線をひく。

まどか：まず，㋔は三角形の合同条件がいえないから，証明 エ だわ。

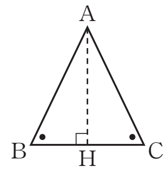
か　い：㋕は $\angle B=\angle C$，$\angle BAD=\angle CAD$ で2組の角が等しいから，残りの角について，$\angle ADB=\angle ADC$ がいえるね。ADは共通だから， E がそれぞれ等しいことがいえて，$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ だ。よって，㋕は証明 オ だよ。

あなた：㋖の図を使って証明をきちんと書いてみると，次のようになるね。

証明を完成させよう！

［証明］　右の図のように，頂点Aから辺BCに垂線をひき，辺BCとの交点をHとする。

$\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ において，



すなわち，$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形である。よって，㋖は可能だ。

まどか：㋗は，やはり **問題１** の㋓と同様の理由でダメね。これは証明不可能だわ。

先　生：そうですね。問題文で「二等辺三角形の性質やその逆を使ってもよい」と認められていなければ，㋗を使って証明することは避けるべきですね。

考えてみよう！　会話を読んで，次の問いに答えよう。

① ア ～ オ に「可能」または「不可能」いずれかの言葉をあてはめよう。

② A ～ E にあてはまる性質や合同条件を書こう。

③ ［　　］に続きを書いて，証明を完成させよう。

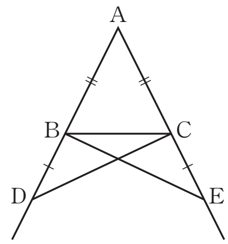
＜たすく先生の数学力向上ポイント＞

・示したい事柄（結論）から導かれる事柄を使って証明を書くのは誤りになってしまう。どの事柄が仮定として使えるのかに注意。

・性質や定理をただ覚えるだけだと，それぞれの関連性がわからない。その性質や定理がどんな事柄から導かれるのかを意識して，日頃から学習に臨むこと。

●放課後数学クラブ●　**生活の中の数学を知ろう**　４章　三角形と四角形

◆昔は大変だった「底角が等しいこと」の証明



紀元前300年頃の数学者ユークリッドは，著書『原論』の中で，「二等辺三角形の２つの底角が等しい」ことを次の流れで証明しています。

・AB＝AC である二等辺三角形ABCの辺AB，ACの延長線上に，BD＝CE となるような点D，E をそれぞれとる。
・△ABE≡△ACD，△CBE≡△BCD であることを順に示す。
・∠ABC＝∠ACB を示す。

なぜ，このような面倒な方法をとっているのかというと，『原論』では**それまでにわかったことのみを使って証明を行う姿勢を徹底**していたためです。この時点では，「２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」という合同条件しか登場しておらず，「３組の辺がそれぞれ等しい」「１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という合同条件や，中点および角の二等分線などの作図方法もまだ登場していませんでした。さあ，みなさんも上の流れで「∠ABC＝∠ACB」を証明してみましょう。

まずは，△ABE≡△ACD，△CBE≡△BCD となることについて，証明を書いてみてください。

証明を完成させよう！

［**証明❶**］　△ABE と△ACDにおいて，

［**証明❷**］　△CBE と△BCDにおいて，

△ABE≡△ACD, △CBE≡△BCD が証明できたら「∠ABC＝∠ACB」となることを右のように示せば終わりです。

現代では簡単に証明できることでも，初期の頃はとても苦労していました。すでに**整理された数学を学べるみなさんは，何百年もの歴史的な議論の積み重ね・くふうを短期間で学べる**ということですね。

合同な図形の対応する角の大きさは等しいから，
△ABE≡△ACD より，∠ABE＝∠ ア ……①
△CBE≡△BCD より，∠ イ ＝∠BCD ……②
ここで，∠ABC＝∠ABE－∠ イ ，
∠ACB＝∠ ア －∠BCD だから，
①，②より，∠ABC＝∠ACB
したがって，AB＝AC ならば，∠ABC＝∠ACB である。 終

考えてみよう！　上の説明を読んで，次の問いに答えよう。

① ❶，❷に続きを書いて，証明を完成させよう。
ただし，使う合同条件は，「２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」のみとします。

② ア ， イ にあてはまる角を答えよう。