

数学の発展的問題

練習問題 10

先生とゆうきさんは、次のルールにしたがって、正多角形をできるだけ多くの三角形に分割した。

＜ルール＞

- ・最初に、正多角形の内部にいくつかの点をとる。
- ・正多角形の頂点や内部の点を線分で結ぶ。
- ・線分どうしは頂点または内部の点以外の交点を持たない。
- ・2点を結ぶ線分上に、他の点はない。

次の会話を読んで、あとの（ア）～（ウ）の問いに答えなさい。

先生：最初に、正方形の内部に3個の点をとって、できるだけ多くの三角形に分割したとき、ひいた線分の本数とできた三角形の個数について調べてみましょう。例えば、図1のように3個の点をとります。

図1

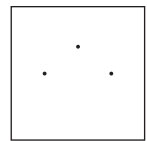


図2, 3を見てください。分割方法は他にもありますが、もとの正方形とともに10本の線分で、8個の三角形に分割されています。

図2

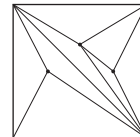
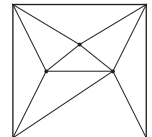
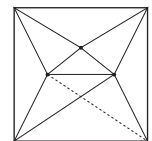


図3



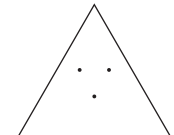
なお、図3において、11本目の線分（例えば図4の点線）をひこうとしても、他の線分と交点をもってしまうため、ルール上11本目の線分をひくことはできません。

図4



次に、図5のように正三角形の内部に3個の点をとったとき、ひいた線分の本数と分割してできた三角形の個数について調べてみましょう。

図5



ゆうき：（ ① ）本の線分で、（ ② ）個の三角形に分割できます。

先生：次に、図6の正五角形の内部にゆうきさんが4個の点をとって、ひいた線分の本数と分割してできた三角形の個数について調べてみましょう。

ゆうき：（ ③ ）本の線分で、（ ④ ）個の三角形に分割できます。確認のため、分割方法を変えて何度かやってみましたが、どの場合も同じ結果になりました。何か法則がありそうですね。

先生：まずは、分割してできた三角形の個数について、図3を使って考えてみましょう。三角形の内角の和に着目すると、どのようなことがいえますか。

ゆうき：分割してできた8個の三角形の内角の和を合計すると、もとの正方形の内角の和と、内部にとった3個の点の周りの 360° ずつを合計したものに等しくなります。

先生：そうですね。

ここで、正 n 角形の内部に m 個の点をとって、分割してできた三角形の個数を x として、 x を m と n を用いて表してみましょう。

ゆうき：さっき気づいた関係を利用すると、 $x = （ ⑤ ）$ となるので、（ ⑤ ）個の三角形に分割できることがわかりました。

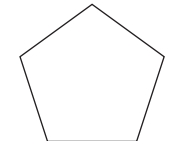
先生：次に、内部にひいた線分の本数を y として、 y を m と n を用いて表してみましょう。

ゆうき：分割してできた x 個の三角形の辺の数を、辺の共有を考えずに合計すると $3x$ (本)です。これを利用すると、 $y = （ ⑥ ）$ となるので、（ ⑥ ）本の線分がひけるということですね。

先生：そのとおりです。 m と n が決まれば、引ける線分の本数が求められるということです。

では、正二十角形の内部に19個の点をとって、A, B, C, D, Eの5人が、この順番で繰り返し線分を1本ずつ引いていって、誰が最後の線分を引くか考えます。

図6



数学の発展的問題

(ア) 会話文中の空欄 (①) ~ (④) にあてはまる数値として最も適する組み合わせを、次の 1 ~ 8 の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

1. ① 7 ② 7 ③ 11 ④ 11

3. ① 9 ② 7 ③ 11 ④ 11

5. ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 14

7. ① 9 ② 9 ③ 11 ④ 14

2. ① 7 ② 7 ③ 14 ④ 11

4. ① 9 ② 7 ③ 14 ④ 11

6. ① 7 ② 9 ③ 14 ④ 14

8. ① 9 ② 9 ③ 14 ④ 14

[]

(イ) 会話文中の空欄 (⑤) (⑥) にあてはまる式として最も適する組み合わせを、次の 1 ~ 8 の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

1. ⑤ $2m + n$

⑥ $3m + n$

2. ⑤ $2m + n$

⑥ $3m + n - 3$

3. ⑤ $2m + n$

⑥ $3m + n + 3$

4. ⑤ $2m + n - 2$

⑥ $3m + n$

5. ⑤ $2m + n - 2$

⑥ $3m + n - 3$

6. ⑤ $2m + n - 2$

⑥ $3m + n + 3$

7. ⑤ $2m + n + 2$

⑥ $3m + n + 3$

8. ⑤ $2m + n + 2$

⑥ $3m + n$

[]

(ウ) 下線部について説明した次の文章中の (あ) ~ (う) にあてはまるものとして最も適する組み合わせを、次の 1 ~ 8 の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

正二十角形の内部に引いた線分の本数は (あ) であり、これを 5 でわったときのあまりが (い) なので、最後に線分を引くのは必ず (う) である。

1. あ 74 い 4 う B

2. あ 74 い 4 う D

3. あ 74 い 2 う B

4. あ 74 い 2 う D

5. あ 77 い 4 う B

6. あ 77 い 4 う D

7. あ 77 い 2 う B

8. あ 77 い 2 う D

[]

数学の発展的問題

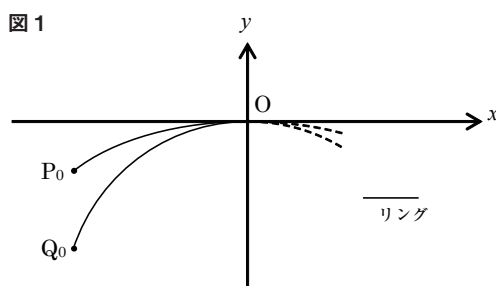
練習問題 11

太郎さんと花子さんは、バスケットボールのプロ選手の中には、リングと同じ高さでシュートを打てる人を知り、シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

二人は、**図1**のように座標軸が定められた平面上に、プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき、ボールがリングに入る場合について、後の仮定を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが、以下では省略する。

仮定

- ・平面上では、ボールの大きさは考えないものとする。
- ・リングの横幅は1とし、リングの太さは無視する。
- ・ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り、かつ、ボールがリングの内部を通る場合を考える。ただし、ボールがリングに当たるとは、ボールがリングの左端または右端と一致することとする。
- ・プロ選手がシュートを打つ場合のボールを点Pとし、Pは、はじめに点 P_0 にあるものとする。
- ・花子さんがシュートを打つ場合のボールを点Qとし、Qは、はじめに点 Q_0 にあるものとする。
- ・シュートの軌道は、原点を頂点とする放物線であるものとする。



次の会話を読んで、あとの(ア)、(イ)の問いに答えなさい。

(ア) プロ選手が、 $P_0(-3, -2)$ からリングに向かってシュートを打つ。リングの左端の x 座標を4とすると、ボールがリングに入るとき、リングの y 座標の範囲は、(あ) $< y <$ (い) である。(あ) (い) に当てはまる数はそれぞれいくらか。ただし、リングの x 座標は正であるものとする。

あ [] い []

(イ) プロ選手は、 $P_0(-4, -2)$ からリングに向かって、花子さんは、 $Q_0(-4, -4)$ からリングに向かってそれぞれシュートを打つ。リングは2つ設置し、上のリングの左端は $(3.5, -2)$ 、下のリングの左端は $(4.5, -4)$ とする。このとき、プロ選手は2つのリングを、花子さんが下のリングに入るかどうかの説明として最も適するものを、次の1～8の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

1. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは上のリングにも下のリングにも入り、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングに入る。
2. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは上のリングにも下のリングにも入り、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングには入らない。
3. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは上のリングには入るが下のリングには入らず、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングに入る。
4. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは上のリングには入るが下のリングには入らず、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングには入らない。
5. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは下のリングには入るが上のリングには入らず、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングに入る。
6. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは下のリングには入るが上のリングには入らず、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングには入らない。
7. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは上のリングにも下のリングにも入らず、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングに入る。
8. プロ選手がシュートを打つ場合、ボールは上のリングにも下のリングにも入らず、花子さんがシュートを打つ場合、ボールは下のリングには入らない。

[]

理科・社会の発展的問題

練習問題 4

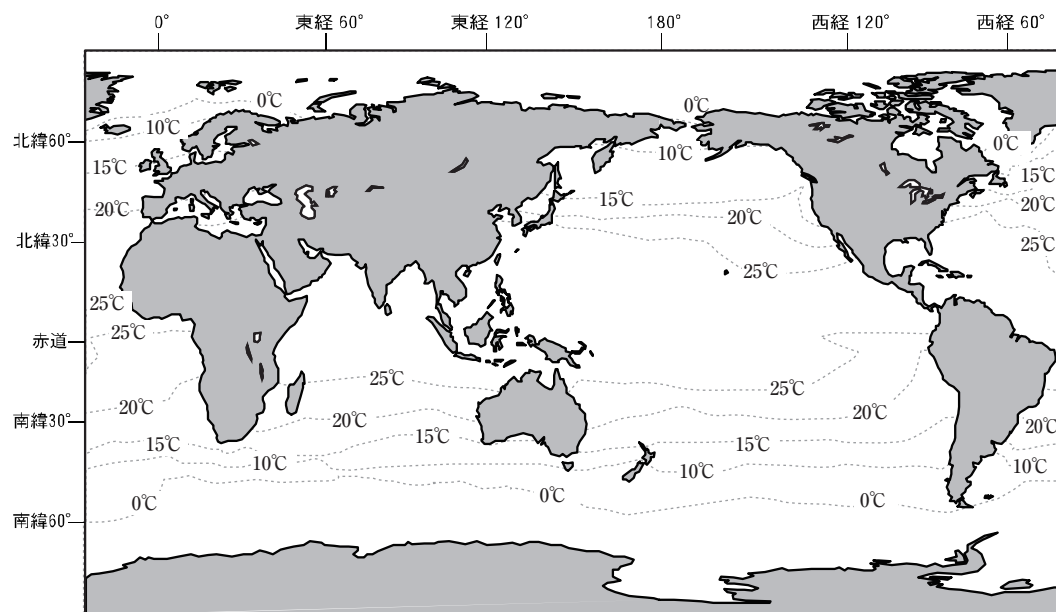
問1

台風に関する次の資料を見て、あとの問いに答えなさい。

資料1

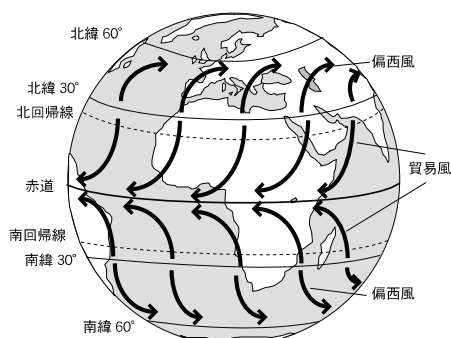
晩夏～初秋にかけて、日本では台風が通過しやすい。台風は、雨により農作物の成長や森林の成長などを助ける一方で、暴風や豪雨などによって大きな被害をもたらすこともある。台風のもととなるのは、熱帯の海上で発生する熱帯低気圧である。熱帯低気圧は、熱帯地域の水温の高い海水をエネルギーに発達して、渦を巻く。一般に、熱帯低気圧は海水温が25℃以上のときに発達し、それ以下では衰えていくといわれている。

資料2 世界の海水温（7月の平均）



※気象庁のホームページを参考に作成

資料3



※『理科年表』などを参考に作成

資料4

北太平洋上の風は、主に3つある。1つは太平洋高気圧による北向きの風、2つ目は赤道の上空を吹く貿易風、3つ目は太平洋の上空を吹く偏西風である。北緯15度から45度付近では、貿易風は、大陸に近くなると弱くなる。

- (1) 次の文は、資料1～4をもとに、赤道付近の太平洋上で発生した台風が、日本列島付近を通過し、消滅するまでの様子を説明したものである。A～Cの3つの空欄にあてはまるものの組み合わせとして正しいものを、1～9のうちから1つ選び、番号で答えなさい。

赤道付近で発生した台風は、【 A 】によって北西に進む。やがて大陸に近づくと、貿易風が弱まり台風は北に進んで日本列島に近づく。日本付近に進むと、【 B 】の影響が重なって、台風は北東向きに進み、日本列島から遠ざかる。【 C 】ので、台風は衰え、消滅する。

- | | | |
|-----------------|--------------|-----------------|
| 1. A：貿易風と太平洋高気圧 | B：貿易風と移動性高気圧 | C：日本列島付近の海水温が低い |
| 2. A：貿易風と太平洋高気圧 | B：偏西風と太平洋高気圧 | C：偏西風の風力が弱い |
| 3. A：貿易風と太平洋高気圧 | B：偏西風と太平洋高気圧 | C：日本列島付近の海水温が低い |

理科・社会の発展的問題

- | | | |
|------------------|---------------|------------------|
| 4. A: 偏西風と移動性高気圧 | B: 貿易風と移動性高気圧 | C: 偏西風の風力が弱い |
| 5. A: 偏西風と移動性高気圧 | B: 貿易風と太平洋高気圧 | C: 日本列島付近の海水温が低い |
| 6. A: 偏西風と移動性高気圧 | B: 偏西風と太平洋高気圧 | C: 偏西風の風力が弱い |
| 7. A: 偏西風と太平洋高気圧 | B: 貿易風と移動性高気圧 | C: 日本列島付近の海水温が低い |
| 8. A: 偏西風と太平洋高気圧 | B: 貿易風と太平洋高気圧 | C: 日本列島付近の海水温が低い |
| 9. A: 偏西風と太平洋高気圧 | B: 偏西風と太平洋高気圧 | C: 偏西風の風力が弱い |

[]

- (2) 日本には、台風が接近・上陸する。アメリカ合衆国は、ハリケーンの影響を受ける。このように、発生メカニズムや発達の理屈が同じ熱帯低気圧でも、発生場所や進み方によって、その名前が変化する。例えば、東アジア周辺の太平洋および赤道より北の南シナ海で発生した熱帯低気圧が、経度 180 度より西に進んだ場合は「台風」と呼ばれる。一方、赤道より北の太平洋で発生した熱帯低気圧が発達し、それが経度 180 度より東に進んだ場合や、大西洋上で発生した熱帯低気圧が発達した場合、「ハリケーン」という。また、インド洋・南太平洋上で発生した熱帯低気圧は、発達すると「サイクロン」と呼ばれる。

では、以下の国では、ハリケーン、サイクロン、台風のどれが接近・上陸する可能性があるか。それぞれ答えなさい

- ① スリランカ ② サウジアラビア ③ メキシコ

① [] ② [] ③ []

- (3) アメリカの東海岸や、日本および東アジアの各国は、ハリケーンや台風などの被害に見舞われることがしばしばあるが、アメリカの西海岸やイギリスやスペインなどヨーロッパの西側諸国では、発達した熱帯低気圧が接近・上陸することはない。この理由を、資料 1～3 を参考に、2 つ答えなさい。

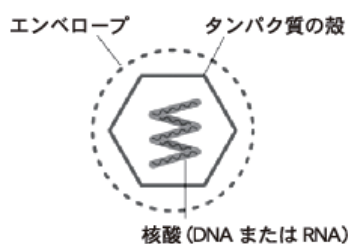
理由 1 _____

理由 2 _____

問 2

現代における消毒法の代表に「アルコール消毒」がある。一部例外があるが、アルコールによって感染症の原因となるウィルスの構造を破壊し、無効化するのがその理由である。ではアルコールは、どのようにしてウィルスを無効化するのか、次の資料 1・資料 2 をもとにかんたんに説明しなさい。

資料 1 ウィルスの構造例



資料 2 アルコールの特徴

アルコールは、揮発性が高く速乾作用がある。また、脂質（脂肪）を分解し、タンパク質を変性する作用がある。人体には影響が少ないので、スプレーによる噴射や手指の消毒など幅広く使われる。

〔語注〕 エンベロープ：ウィルスの外側をおおう、主に脂質でできた膜。
 核酸：ウィルスの中心にある遺伝子を構成する物質で、DNA（デオキシリボ核酸）の場合 と RNA（リボ核酸）の場合がある。

理科・社会の発展的問題

(イ)

- (i) 下線部 ①の赤色巨星は、表面温度が低いため赤く輝く、巨大な恒星のことである。

右の図は、縦軸に恒星の絶対光度*（太陽の光度を1として表す）をとり、横軸に表面温度（右の図では絶対温度*）をとって、恒星をその性格によって分類するための図である。ヘルツシュプリング・ラッセル図（略称：HR図）とよばれている。

主な恒星の明るさと表面温度には相関関係がある。図では、点線で囲まれた部分である。太陽をはじめとして、多くの恒星がここに収まる。そこで、この帯のエリアを「主系列」とよび、太陽などを「主系列星」とよぶ。この図から、太陽は、ある意味標準的な、ありふれた恒星であることがわかる。

HR図は、一般的なグラフとは軸の数値の取り方が異なる。右の図のように、横軸の目盛り間隔は温度に比例していない。この理由は、HR図の横軸は本来、表面温度だけではなく、恒星の光の「色合い」も基準にしているからである。なお、右の低温側が赤で、左の高温になるにしたがって、黄色から白、そして青白い色に変化する。

また、このHR図では、縦軸の目盛りには、指数が使われている。やはり数値と目盛りが比例していない。では、縦軸はなぜ指数を用いているのか、理由を考えてかんたんに書きなさい。

語注 絶対光度：天体の見かけ上の明るさは、地球からの距離によって変化する。そこで、比較のために地球から同じ距離の位置（約33光年）にあるとして、明るさを比較する。このときの光度の値を絶対光度とよぶ。
絶対温度：絶対零度（摂氏約マイナス273度）を0とした温度。単位はK（ケルビン）。水の融点は約273K。

[]

- (ii) 下線部 ②について、次のア～オの文章は、現在の代表的な学説にしたがって、恒星の一生をおおまかにまとめたものである。ただし、これらは順番が正しくないので、本来の順番に書き直したい。正しい順に並べ替えたものとして最も適するものを、あとの1～8の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

ア 質量が太陽の10倍以上の恒星では、核融合反応がさらに進行する。中心核の温度25億K*を超えると核融合により鉄などが生成され、鉄の中心核を形成する。鉄の中心核の温度が上昇して100億Kを超えると、今度は鉄の原子核がヘリウムに分解される反応がはじまる。この分解によって、中心部の熱を奪い、圧力が一気に下がって重力を支えられなくなり、恒星は一気に収縮する。これを重力崩壊とよぶ。

イ さらに、赤色巨星内でヘリウムの核の収縮が進行して温度が1億Kを超えると、星の中心部で、ヘリウムから炭素や酸素への核融合反応がはじまる。すると、星全体が収縮して主系列星に近い状態に戻る。さらに反応が進んで中心核の温度が6億Kを超えると、炭素が核融合反応によって、ネオンやマグネシウムに変化する。

ウ 主系列星となった後も、水素の核融合は進行し、ヘリウムの核の質量は増えていく。ヘリウムの核は質量が増えると収縮し、温度が上がる。周りには水素は、中心部にあるヘリウムの温度が上がるので、膨張（ぼうちょう）する。膨張によって星の表面温度は低下し、やがて赤色巨星となる。

エ できたばかりの恒星は、だんだん収縮して中心の温度を上昇させていく。中心の温度が1000万K*を超えると、星の周りには水素が結合し、ヘリウムへと変換される核融合反応が起こりはじめる。この核融合反応によって発生する大きなエネルギーによって、星は輝き、主系列星となる。

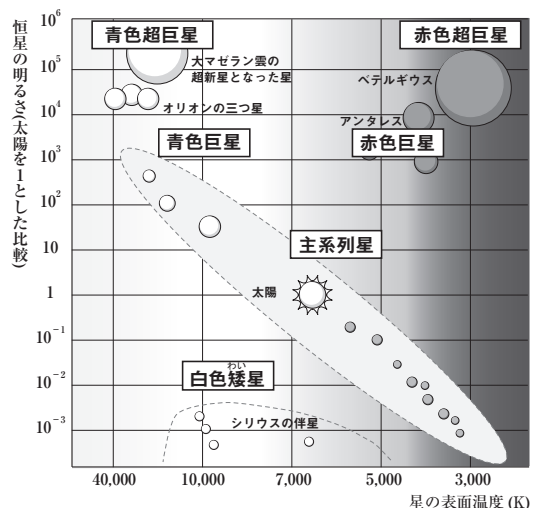
オ この重力崩壊の際には、ばく大なエネルギーが一気に解放されて、恒星全体が吹き飛ぶ。これが超新星爆発である。質量が太陽の10～20倍の恒星の場合は、超新星爆発後、重力崩壊で押しつぶされた直径10km程度の中心核が残る中性子星となる。また、質量が太陽の30倍よりも大きい恒星の場合には、中性子星になってもその重力を支えることができずに、さらに重力崩壊が進行してブラックホールとなる。

語注 K：ケルビン・絶対温度を示す単位。（i）の語注を参照。

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1. ア→エ→イ→ウ→オ | 2. イ→ウ→エ→ア→オ | 3. イ→エ→オ→ウ→ア | 4. ウ→エ→オ→ウ→ア |
| 5. エ→ウ→イ→ア→オ | 6. エ→オ→ア→ウ→イ | 7. オ→エ→ア→ウ→イ | 8. オ→ウ→イ→エ→ア |

[]

ヘルツシュプリング・ラッセル図



※ 10^{-1} は $\frac{1}{10}$ （=0.1）、 10^{-2} は $\frac{1}{10^2}$ （=0.01）を示す。

理科・社会の発展的問題

(iii) 下線部 ③について、ベテルギウスが超新星爆発した場合の明るさについては、さまざまな研究がなされているが、ここでは、現在のおうし座にある「かに星雲」の元となった超新星(SN 1054)が超新星爆発したときと同規模の爆発が起こると仮定する(「かに星雲」は11世紀に爆発が観測された超新星の残がいで、学術上の名称はNGC 1952)。

地球から見える星の見かけの明るさは、地球からの距離の2乗に反比例する。たとえば、明るさが同じ星を2倍遠くに置くと、見かけの明るさは4分の1となる。これを利用して、ベテルギウスが超新星爆発したときの見かけの明るさは、かに星雲の超新星爆発時の約【 あ 】倍、三日月の約【 い 】倍になる。

【 あ 】, 【 い 】にあてはまる整数として最も適するものを、あとの1～9の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

なお、計算にあたっては、以下の条件を用いること。

条件Ⅰ ベテルギウスは地球から約640光年の距離だが、700光年とし、かに星雲の距離は7000光年とする。

条件Ⅱ かに星雲の超新星爆発時の見かけの等級は－6等級、三日月の見かけの等級は－7等級とする。

条件Ⅲ 見かけの明るさを表す等級は、1小さくなると明るさは約2.51倍になることとする。

条件Ⅳ 2.51^5 を100として計算してよい。

- | | | | | | |
|----------|------|----------|------|----------|-------|
| 1. あ：1 | い：25 | 2. あ：1 | い：40 | 3. あ：1 | い：100 |
| 4. あ：10 | い：25 | 5. あ：10 | い：40 | 6. あ：10 | い：100 |
| 7. あ：100 | い：25 | 8. あ：100 | い：40 | 9. あ：100 | い：100 |

[]

(ウ)「天体からの光はタイムマシンである」と、よく表現される。たとえばアルニタクの光。地球から約800光年の距離がある。光が地球にとどくのに、800年かかるのだから、地球時間を基準にすれば、われわれは鎌倉時代の光を見ていることになる。

では、明日、約640光年の距離にあるベテルギウスが超新星になって異常な輝きを見せたとしたら、それは日本の歴史におけるどのような時代の光なのだろうか。次のa～eの中から、ベテルギウスの爆発の前と後の神奈川県のできごととして、年代的に最も近いものをそれぞれ正しく選択したものとして最も適するものを、あとの1～9の中から一つ選び、その番号を答えなさい。

- 後醍醐天皇の命を受けた新田氏の軍勢が鎌倉を攻め落とし、幕府を滅ぼした。
- 北条氏の小田原城が、豊臣秀吉によって攻め落とされた。
- 鎌倉幕府は、元からの使者を処刑し、九州防衛の準備を進めた。
- 三浦半島の浦賀にアメリカ合衆国の艦隊が到着し、開国を求めた。
- 平将門の乱の後の相模や武蔵^{さがみ}には、朝廷に従わない武士が多くいた。

- | | | | | | |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| 1. 爆発前：a | 爆発後：b | 2. 爆発前：a | 爆発後：c | 3. 爆発前：b | 爆発後：d |
| 4. 爆発前：b | 爆発後：c | 5. 爆発前：c | 爆発後：d | 6. 爆発前：c | 爆発後：e |
| 7. 爆発前：d | 爆発後：a | 8. 爆発前：e | 爆発後：b | 9. 爆発前：e | 爆発後：a |

[]

