

第3章 図形と計量



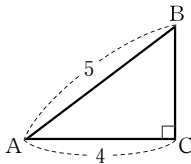
1 三角比



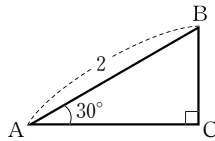
【例題】1 正接

次の図の直角三角形ABCにおいて、 $\tan A$ の値を求めよ。

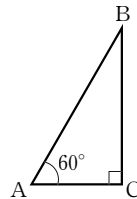
(1)



(2)



(3)

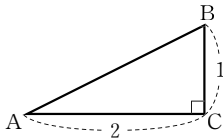


【解】(1) $BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ より、 $\tan A = \frac{3}{4}$ (2) $AC = \sqrt{3}$, $BC = 1$ より、 $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

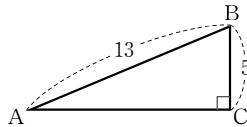
(3) $AC : BC = 1 : \sqrt{3}$ より、 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

1 次の図の直角三角形ABCにおいて、 $\tan A$ の値を求めよ。

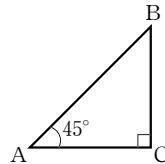
(1)



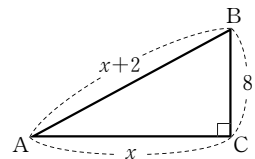
(2)



(3)



2 右図の直角三角形ABCにおいて、 x の値と $\tan A$ の値を求めよ。



【例題】2 正接と三角比の表

巻末の三角比の表を用いて、次の問いに答えよ。

- (1) $\tan 54^\circ$ の値を求めよ。
- (2) $\tan A = 0.7536$ を満たす角 A を求めよ。
- (3) $\tan A = 3.5$ のとき、角 A の大きさは約何度か。

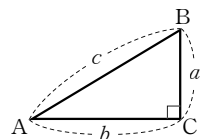
【解】(1) 三角比の表で、正接の欄の 54° の値を見ると、 $\tan 54^\circ = 1.3764$
 (2) 正接の欄の0.7536から角を求めると、 $\tan 37^\circ = 0.7536$ より、 $A = 37^\circ$
 (3) 正接の欄で3.5に近い値は3.4874である。この値に対する角は 74° だから、 $A \approx 74^\circ$

●ポイント

① 右図の直角三角形ABCで、比の値 $\frac{BC}{AC}$ を $\angle A$ の正接またはタンジェント

といい、 $\tan A$ と書く。 $\tan A = \frac{a}{b}$, $a = b \tan A$

② 記号 $\approx$ は、その左辺が右辺の値にほぼ等しいことを表す。



3 三角比の表を用いて、次の値を求めよ.

- (1) $\tan 24^\circ$ (2) $\tan 36^\circ$ (3) $\tan 70^\circ$ (4) $\tan 3^\circ$

4 三角比の表を用いて、次の等式を満たす角 A を求めよ.

- (1) $\tan A = 0.2493$ (2) $\tan A = 1.6643$ (3) $\tan A = 2.2460$

5 次の等式を満たす角 A の大きさは約何度か. 三角比の表を用いて答えよ.

- (1) $\tan A = 0.3$ (2) $\tan A = 1.8$ (3) $\tan A = 4.7$

例題 3 正接の利用

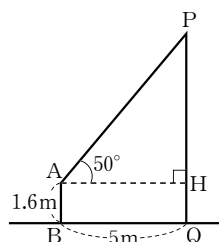
平地に立っている木の高さ PQ を測るため、木の根元 Q から5m離れた地点 B に立って木の上端 P を望んだら、仰角が 50° であった. 目の高さ AB を1.6mとすると、木の高さは約何mか. ただし、答えは小数第2位を四捨五入せよ.

解 点 A から線分 PQ に引いた垂線を AH とすると、

$$\frac{PH}{AH} = \tan 50^\circ, \quad PH = AH \tan 50^\circ$$

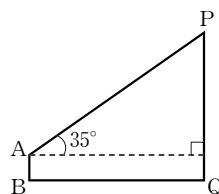
三角比の表より、 $\tan 50^\circ = 1.1918$ だから、 $PH = 5 \times 1.1918 = 5.959 \div 6.0$ (m)

よって、 $PQ = PH + HQ = 6.0 + 1.6 = 7.6$ (m)

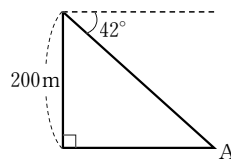


答 約7.6m

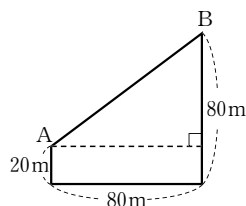
6 塔の高さ PQ を測るため、塔の真下 Q から15m離れた地点 B に立って塔の上端 P を望んだら、仰角が 35° であった. 目の高さ AB を1.7mとすると、塔の高さは約何mか. ただし、答えは小数第2位を四捨五入せよ.



7 平地に高さ200mの展望台が建っている. この展望台から、地上の A 地点を眺めたら、その俯角が 42° であった. このとき、展望台から A 地点までの水平距離は約何mか. ただし、答えは1m未満を四捨五入せよ. また、目の高さは考えない.

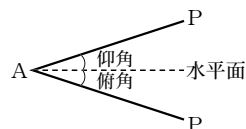


8 高さ20mのタワー A と高さ80mのタワー B があり、2つのタワーは80m離れている. タワー A の上端からタワー B の上端を見上げたときの仰角は約何度か. ただし、目の高さは考えない.



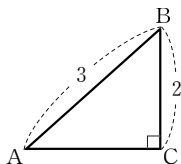
●ポイント

- ① 点 A から点 P を観測するとき、 P が A を通る水平面より上方にあれば、 AP と水平面が作る角を^{ぎょうかく}仰角といい、 P が A を通る水平面より下方にあれば、 AP と水平面が作る角を^{ふかく}俯角という.

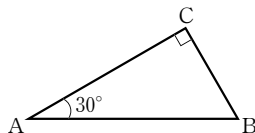


【例題】4 正弦・余弦次の図の直角三角形ABCにおいて、 $\sin A$ 、 $\cos A$ の値を求めよ。

(1)



(2)

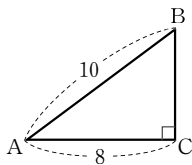


解 (1) $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$, $AC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ より, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

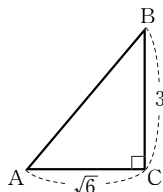
(2) $AB : BC : CA = 2 : 1 : \sqrt{3}$ より, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9 次の図の直角三角形ABCにおいて、 $\sin A$ 、 $\cos A$ の値を求めよ。

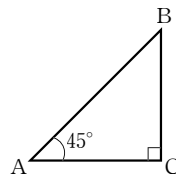
(1)



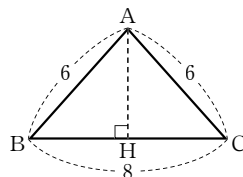
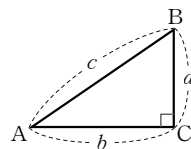
(2)



(3)

**10** 右図のような、 $AB=AC=6$ 、 $BC=8$ の $\triangle ABC$ がある。

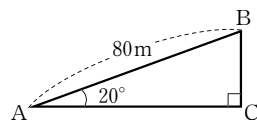
(1) 辺BCを底辺とみたときの高さAHを求めよ。

(2) $\sin B$ 、 $\cos B$ の値を求めよ。**11** 三角比の表を用いて、次の値を求めよ。(1) $\sin 35^\circ$ (2) $\sin 6^\circ$ (3) $\sin 74^\circ$ (4) $\cos 10^\circ$ (5) $\cos 47^\circ$ (6) $\cos 89^\circ$ **12** 三角比の表を用いて、次の等式を満たす角Aを求めよ。(1) $\sin A = 0.3090$ (2) $\sin A = 0.9703$ (3) $\sin A = 0.6691$ (4) $\cos A = 0.0872$ (5) $\cos A = 0.9703$ (6) $\cos A = 0.5150$ **●ポイント**① 右図の直角三角形ABCで、 $\frac{BC}{AB}$ を $\angle A$ の**正弦**または**サイン**といい、 $\sin A$ と書く。また、 $\frac{AC}{AB}$ を $\angle A$ の**余弦**または**コサイン**といい、 $\cos A$ と書く。② $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ 

【例題】5 正弦・余弦の利用

傾斜角が 20° の上り坂を、地点Aから地点Bまで80m進んだとき、次の問いに答えよ。ただし、答えは1m未満を四捨五入せよ。

- (1) 水平方向に進んだ距離ACは約何mか。
 (2) 地点Aの標高が30mならば、地点Bの標高は約何mか。



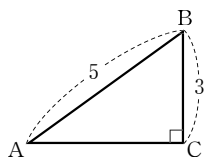
【解】 (1) $AC = 80 \cos 20^\circ = 80 \times 0.9397 = 75.176$ (m) よって、**約75m**
 (2) $30 + BC = 30 + 80 \sin 20^\circ = 30 + 80 \times 0.3420 = 30 + 27.36 = 57.36$ (m) よって、**約57m**

13 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形ABCで、 $AB = 6$ cm, $\angle A = 40^\circ$ のとき、次の辺の長さは約何cmか。ただし、答えは小数第2位を四捨五入せよ。

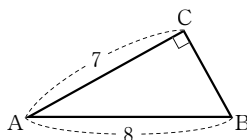
- (1) 辺BC (2) 辺AC

14 次の図において、角Aは約何度か。

(1)

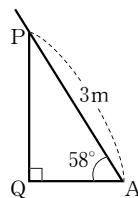


(2)

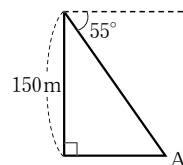


15 垂直なへいPQにはしごを立てかけたところ、へいの上端Pからはしごの下端Aまでは3mあり、はしごと地面の作る角は 58° であった。次の問いに答えよ。ただし、答えは小数第2位を四捨五入せよ。

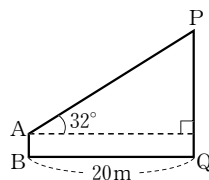
- (1) へいの高さPQは約何mか。
 (2) はしごの下端からへいまでの距離AQは約何mか。



16 平地に高さ150mの展望台が建っている。この展望台から、地上のA地点を眺めたら、その俯角が 55° であった。このとき、展望台の頂上からA地点までの直線距離は約何mか。ただし、答えは1m未満を四捨五入せよ。

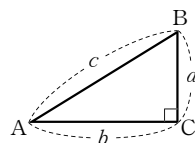


17 平地に立っている木の根元Qから20m離れた地点Bに立って木の上端Pを望んだら、目の高さAからの仰角が 32° であった。直線距離APは約何mか。ただし、答えは1m未満を四捨五入せよ。

**●ポイント**

- ① 正接、正弦、余弦をまとめて**三角比**という。
 ② 右図の直角三角形ABCで、

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ より, } a = c \sin A \quad \cos A = \frac{b}{c} \text{ より, } b = c \cos A$$



20 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$(1) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(2) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

例題 8 三角比の相互関係の利用

次の問いに答えよ.

(1) θ が鋭角で, $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ.

(2) θ が鋭角で, $\tan \theta = 2$ のとき, $\cos \theta$, $\sin \theta$ の値を求めよ.

解 (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$$\cos \theta > 0 \text{ より, } \cos \theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

(2) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より, $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$

$$\cos \theta > 0 \text{ より, } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = \tan \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

21 θ が鋭角で, $\sin \theta$ が次の値のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ.

$$(1) \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$(2) \sin \theta = \frac{1}{3}$$

$$(3) \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

22 θ が鋭角で, $\cos \theta$ が次の値のとき, $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ.

$$(1) \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{8}{17}$$

$$(3) \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

23 θ が鋭角で, $\tan \theta$ が次の値のとき, $\cos \theta$, $\sin \theta$ の値を求めよ.

$$(1) \tan \theta = \frac{1}{3}$$

$$(2) \tan \theta = 7$$

$$(3) \tan \theta = \sqrt{11}$$

●ポイント

① [三角比の相互関係] $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

② 三角比の相互関係を利用するときは, 次のように変形する.

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta, \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

【例題】9 $90^\circ - \theta$ の三角比

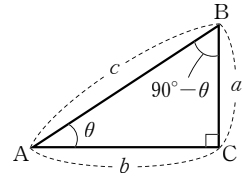
右下の図の直角三角形ABCにおいて、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (2) \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \quad (3) \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

【解】 (1) $\sin(90^\circ - \theta) = \sin B = \frac{b}{c} = \cos \theta$

(2) $\cos(90^\circ - \theta) = \cos B = \frac{a}{c} = \sin \theta$

(3) $\tan(90^\circ - \theta) = \tan B = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan \theta}$



24 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

$$(1) \sin 50^\circ \quad (2) \cos 75^\circ \quad (3) \tan 48^\circ$$

$$(4) \sin 63^\circ \quad (5) \cos 52^\circ \quad (6) \tan 81^\circ$$

25 次の三角比について、正弦は余弦で、余弦は正弦で表せ。

$$(1) \sin 20^\circ \quad (2) \sin 9^\circ \quad (3) \sin 86^\circ$$

$$(4) \cos 73^\circ \quad (5) \cos 11^\circ \quad (6) \cos 54^\circ$$

26 $\triangle ABC$ の3つの内角を A, B, C とするとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \quad (2) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B+C}{2} = 1$$

$$(3) \tan \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} \quad (4) \sin^2 \frac{A+B}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{C}{2} \right) = 1$$

【例題】10 鈍角の三角比

次の三角比の値を求めよ。

$$(1) \sin 120^\circ \quad (2) \cos 120^\circ \quad (3) \tan 120^\circ$$

$$(4) \cos 0^\circ \quad (5) \tan 0^\circ \quad (6) \sin 180^\circ$$

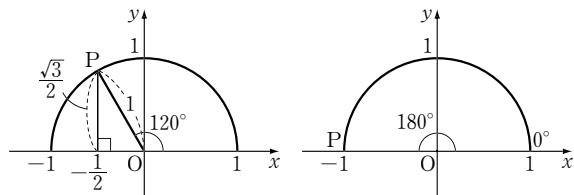
【解】 原点を中心とする単位円(半径1の円)において、 x 軸の正の向きから左回りに角 θ をとったときの半径を OP とし、 $P(x, y)$ とすると、 $\sin \theta = y$, $\cos \theta = x$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ である。

$$(1) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \tan 120^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$(4) \cos 0^\circ = 1 \quad (5) \tan 0^\circ = 0 \quad (6) \sin 180^\circ = 0$$

**●ポイント**

① $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$

② 三角比の値は、原点を中心とする単位円(半径1の円)の円周上の座標として定義できる。

27 次の三角比の値を求めよ.

- (1) $\sin 135^\circ$ (2) $\cos 135^\circ$ (3) $\tan 135^\circ$
 (4) $\sin 150^\circ$ (5) $\cos 150^\circ$ (6) $\tan 150^\circ$

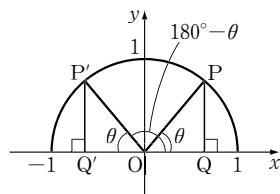
28 次の三角比の値を求めよ. なければ「ない」と答えよ.

- (1) $\sin 0^\circ$ (2) $\cos 90^\circ$ (3) $\sin 90^\circ$
 (4) $\tan 90^\circ$ (5) $\cos 180^\circ$ (6) $\tan 180^\circ$

【例題】11 $180^\circ - \theta$ の三角比

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ が成り立つことを示せ.

解 右図の単位円で, 点Pのy座標, 点P'のy座標はそれぞれ $\sin \theta$, $\sin(180^\circ - \theta)$ である.
 $\triangle PQO \equiv \triangle P'Q'O$ であるから, $PQ = P'Q'$
 よって, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$



29 次の等式が成り立つことを示せ.

- (1) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ (2) $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

【例題】12 $180^\circ - \theta$ の三角比の利用

三角比の表を用いて, 138° の正弦, 余弦, 正接の値を求めよ.

解 $138^\circ = 180^\circ - 42^\circ$ より,
 $\sin 138^\circ = \sin(180^\circ - 42^\circ) = \sin 42^\circ = \mathbf{0.6691}$
 $\cos 138^\circ = \cos(180^\circ - 42^\circ) = -\cos 42^\circ = \mathbf{-0.7431}$
 $\tan 138^\circ = \tan(180^\circ - 42^\circ) = -\tan 42^\circ = \mathbf{-0.9004}$

30 三角比の表を用いて, 次の三角比の値を求めよ.

- (1) $\sin 125^\circ$ (2) $\cos 152^\circ$ (3) $\tan 93^\circ$
 (4) $\cos 110^\circ$ (5) $\sin 175^\circ$ (6) $\tan 132^\circ$

31 $\sin 40^\circ = a$ とするとき, 次の三角比の値を a の式で表せ.

- (1) $\sin 140^\circ$ (2) $\cos 50^\circ$ (3) $\cos 130^\circ$ (4) $\sin 130^\circ$

●ポイント

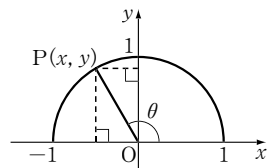
① $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のときの θ の三角比の定義

右図の単位円において, $\sin \theta = y$, $\cos \theta = x$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$

② θ が鈍角のときは, $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$, $\tan \theta < 0$

③ θ が 90° のときは, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ において $x = 0$ となるので, $\tan 90^\circ$ の値はない.

④ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$



例題 13 $90^\circ + \theta$ の三角比

θ が鋭角のとき、次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

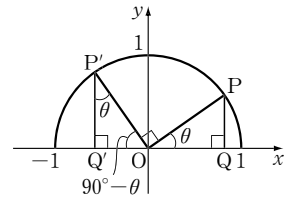
解 右図の単位円で、 P 、 P' の座標は、定義からそれぞれ

$P(\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $P'(\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta))$ と表せる.

一方、 $\triangle OP'Q' \equiv \triangle POQ$ より、 $P'Q' = OQ$ 、 $OQ' = PQ$ だから、

$P'(-\sin \theta, \cos \theta)$ とも表せる.

よって、 $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$ 、 $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$



32 例題13の結果を用いて、 θ が鋭角のとき、 $\tan(90^\circ + \theta) = -\frac{1}{\tan \theta}$ を示せ.

33 次の三角比について、正弦は余弦で、余弦は正弦で表せ.

(1) $\sin 134^\circ$

(2) $\cos 111^\circ$

(3) $\sin 157^\circ$

(4) $\cos 126^\circ$

例題 14 等式を満たす角の値

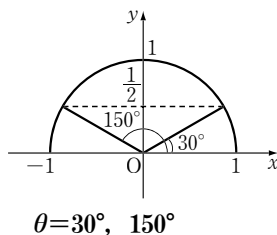
$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ の値を求めよ.

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

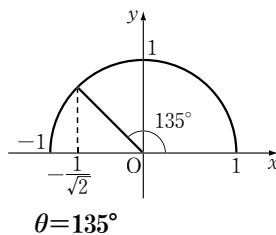
(2) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

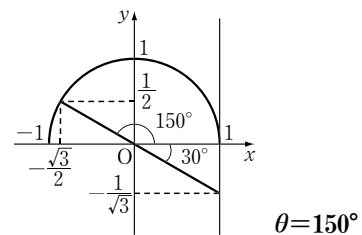
解 (1) 単位円上の y 座標が $\frac{1}{2}$ である点に対応する角である.



(2) 単位円上の x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ である点に対応する角である.



(3) 点 $(1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ と原点を通る直線が単位円と交わる点に対応する角である.



34 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ の値を求めよ.

(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \theta = \frac{1}{2}$

(3) $\tan \theta = -1$

(4) $\sin \theta = 0$

(5) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\tan \theta = -\sqrt{3}$

(7) $\sqrt{2} \sin \theta = 1$

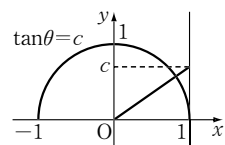
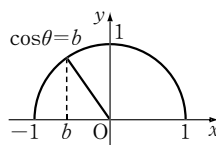
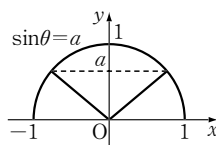
(8) $2 \cos \theta + 1 = 0$

(9) $\sqrt{3} \tan \theta = 1$

ポイント

① $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であり、 $\tan \theta$ は任意の値をとる.

② 等式を満たす角の値や不等式を満たす角の値の範囲を求めるときは、単位円をかいて考えるとよい.

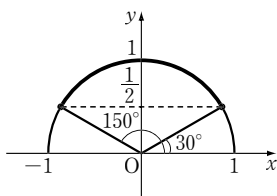


例題 15 不等式を満たす角の範囲

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

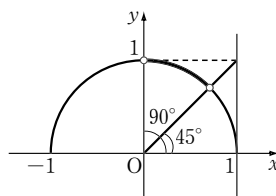
(1) $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$

(2) $\tan \theta > 1$

解 (1)

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たすのは、 $\theta = 30^\circ, 150^\circ$ より、図から、 $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$

(2)



$\tan \theta = 1$ を満たすのは、 $\theta = 45^\circ$ より、図から、 $45^\circ < \theta < 90^\circ$

35 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \theta < \frac{1}{2}$

(3) $\tan \theta < -1$

(4) $\sqrt{2} \sin \theta - 1 < 0$

(5) $2 \cos \theta + \sqrt{3} \geq 0$

(6) $\sqrt{3} \tan \theta - 3 \leq 0$

(7) $\frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(8) $-\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

(9) $\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan \theta \leq 1$

例題 16 鈍角の三角比の相互関係

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ のとき、 $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めよ。

解 $\tan \theta < 0$ および $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より、 θ は鈍角である。

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より、} \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\cos \theta < 0 \text{ より、} \cos \theta = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}, \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

36 次の問いに答えよ。

(1) θ が鈍角で、 $\sin \theta = \frac{1}{4}$ のとき、 $\cos \theta, \tan \theta$ の値を求めよ。

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\cos \theta = -\frac{15}{17}$ のとき、 $\sin \theta, \tan \theta$ の値を求めよ。

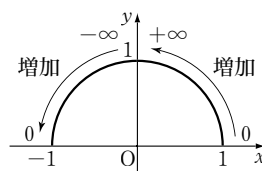
(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\tan \theta = -4\sqrt{5}$ のとき、 $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めよ。

(4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき、 $\cos \theta, \tan \theta$ の値を求めよ。

●ポイント

① $\tan \theta$ についての不等式を解くときは、 θ の増減と $\tan \theta$ の増減の関係が右図のようになっていることを理解しておく。 $\tan 90^\circ$ の値は存在しないことにも注意する。

② 鋭角のときの三角比の相互関係は、鈍角のときもそのまま成り立つ。



【例題】17 三角比の方程式

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とするとき、次の方程式を解け.

$$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

解 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を使って、方程式を $\cos\theta$ だけの式にすると、

$$2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 1 = 0$$

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$

この方程式の左辺を因数分解して、

$$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0, \cos\theta = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \cos\theta = -\frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\textcircled{1}$ を満たすのは、 $\theta = 0^\circ$ 、 $\textcircled{2}$ を満たすのは、 $\theta = 120^\circ$

以上より、 $\theta = 0^\circ, 120^\circ$

37 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とするとき、次の方程式を解け.

(1) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

(2) $2\cos^2\theta = \cos\theta$

(3) $\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$

(4) $2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$

(5) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta - 3 = 0$

(6) $3\tan^2\theta + (\sqrt{3} - 3)\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

【例題】18 三角比で表された関数

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき、関数 $y = \sin^2x + \cos x + 1$ の最大値、最小値を求めよ.

また、それらを与える x の値も求めよ.

解 $\sin^2x = 1 - \cos^2x$ より、

$$y = (1 - \cos^2x) + \cos x + 1 = -\cos^2x + \cos x + 2$$

$\cos x = t$ とおくと、

$$y = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

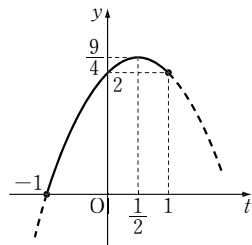
また、 $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ より、 $-1 \leq \cos x \leq 1$

すなわち、 $-1 \leq t \leq 1$ である.

よって、 $\cos x = \frac{1}{2}$ のとき、最大値 $\frac{9}{4}$

$\cos x = -1$ のとき、最小値 0

以上より、 $x = 60^\circ$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$ 、 $x = 180^\circ$ のとき最小値 0

**●ポイント**

- ① $\sin\theta$ や $\cos\theta$ についての 2 次式を扱う場合は、 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して、三角比の種類を統一する.
- ② 三角比の方程式や三角比で表された関数では、 $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の値の範囲に注意する.

38 $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき、次の関数の最大値、最小値を求めよ。また、それらを与える x の値も求めよ。

- (1) $y = \cos^2 x - 3 \cos x + 2$
- (2) $y = -2 \sin^2 x + 2 \sin x$
- (3) $y = \sin^2 x - \cos x + 3$
- (4) $y = -2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x + 1$

39 $30^\circ \leq x \leq 60^\circ$ のとき、 $y = -\tan^2 x + 2 \tan x$ の最大値、最小値を求めよ。また、それらを与える x の値も求めよ。

40 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\sin \theta \cos \theta$
- (2) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$
- (3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

例題 19 直線の傾きと正接

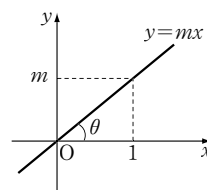
次の問いに答えよ。

- (1) 直線 $\sqrt{3}x + y = 0$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。
- (2) 点 $(0, 3)$ を通り、 x 軸の正の向きとのなす角が 135° である直線の方程式を求めよ。

解 x 軸の正の向きから左回りに直線 $y = mx$ まで測った角を θ とするとき、角 θ を直線 $y = mx$ と x 軸の正の向きとのなす角という。

- (1) y について解くと、 $y = -\sqrt{3}x$ この直線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると、 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ より、 $\theta = 120^\circ$

- (2) 直線の傾きは $\tan 135^\circ = -1$ 、点 $(0, 3)$ を通るから、 $y = -x + 3$



41 次の直線と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。

- (1) $y = \sqrt{3}x$
- (2) $x - y = 0$
- (3) $x + \sqrt{3}y = 0$

42 次の直線の方程式を求めよ。

- (1) 原点を通り、 x 軸の正の向きとのなす角が 30° である直線
- (2) 点 $(0, -2)$ を通り、 x 軸の正の向きとのなす角が 120° である直線

43 2 直線 $x + y = 0$ 、 $y = -\sqrt{3}x$ の作る角のうち、小さい方の角を求めよ。

●ポイント

① 40 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ より、 $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$

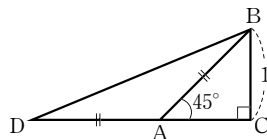
② 直線 $y = mx$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると、 $m = \tan \theta$

混合問題

A

- ① 右図で、点D, A, Cは一直線上にあり、 $\angle DCB=90^\circ$,
 $\angle BAC=45^\circ$, $AC=BC=1$, $AB=AD$ である.

この図を用いて、 $\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ.



- ② 平地に2つのビルA, Bが建っており、2つのビル間の距離は200m、ビルAの高さは150mである。ビルAの屋上からビルBの屋上を見下ろしたところ、俯角が 20° であった。ビルBの高さは約何mか。ただし、答えは1m未満を四捨五入せよ。

- ③ 四角形の内角をA, B, C, Dとすると、 $\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{C+D}{2} = 0$ が成り立つことを証明せよ。

- ④ 次の問いに答えよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (1) $\sin \theta = \frac{3}{4}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。
- (2) 不等式 $2|\cos \theta| > \sqrt{3}$ を解け。
- (3) 方程式 $4\sin^2 \theta - 2(1+\sqrt{3})\cos \theta - 4 - \sqrt{3} = 0$ を解け。
- (4) 関数 $y = \sin^2 \theta - \cos \theta$ の最大値、最小値、およびそれらを与える θ の値を求めよ。

- ⑤ 直線 $x + \sqrt{3}y = 0$ と y 軸の正の向きとのなす角を2等分する直線の方程式を求めよ。

B

- ⑥ 同一水平面上の4km離れた2つの地点A, Bで、同じ時刻に同じ飛行機を見た。このとき、Aから北方に仰角 30° 、Bから東方に仰角 45° であった。飛行機の高さはいくらか。

- ⑦ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$ のとき、次の連立方程式を解け。

$$\sin x + \cos y = \sqrt{3}, \quad \cos x + \sin y = 0$$

- ⑧ $45^\circ < \theta < 90^\circ$ で、 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

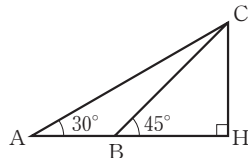
- ⑨ θ についての方程式 $\cos^2 \theta - 2p \sin \theta - p - 2 = 0$ が解をもつような定数 p の値の範囲を定めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

■ヒント

- ⑨ まず、 $\sin \theta$ だけの方程式になおす。次に、 $\sin \theta = t$ とおき、 t についての方程式が $0 \leq t \leq 1$ に解をもつ条件を考える。

章末問題 A

- 1 一直線の道路を進む人が、地点Aで道路と 30° の角をなす方向に塔Cを見た。さらに、3 km進んだ地点Bでは、塔は道路と 45° の角をなす方向に見えた。塔と道路の距離CHを求めよ。



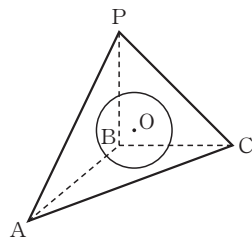
- 2 θ が鈍角で、 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。
- 3 関数 $y = \cos^2 x + \sin x + 1$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) の最大値、最小値を求めよ。また、それらを与える x の値も求めよ。
- 4 $b = \sqrt{14}$, $c = 2\sqrt{2}$ である鋭角三角形ABCの外接円の半径が2のとき、 $\cos B$ の値および a を求めよ。
- 5 $\triangle ABC$ において、 $\sin A : \sin B : \sin C = 15 : 13 : 4$ のとき、 $\tan A$ の値を求めよ。
- 6 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、次の等式を証明せよ。

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}$$
- 7 四角形ABCDは円Oに内接し、 $AB=3$, $BC=7$, $CD=8$, $DA=8$ である。
 (1) 四角形ABCDの面積を求めよ。
 (2) 円Oの半径を求めよ。

- 8 1 辺の長さが1の正四面体OABCがある。OAの中点をL、OBを2:1に分ける点をM、OCを1:2に分ける点をNとすると、 $\triangle LMN$ の面積を求めよ。

- 9 右図の三角錐PABCにおいて、面ABCは $\angle B=90^\circ$ の直角三角形、PBは面ABCに垂直で、 $AB=4$, $PB=BC=2$ である。また、球Oは三角錐PABCに内接している。

- (1) 球Oの半径を求めよ。
 (2) 球Oに接し、面PBCに平行な平面でこの三角錐を切り、2つの立体に分ける。このとき、点Pを含む方の立体の体積を求めよ。



章末問題 B

1 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ で、 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

(2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$

(3) $\tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta}$

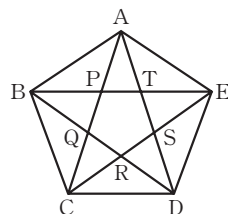
2 x についての 2 次方程式 $x^2 + 2x \sin \theta + \cos^2 \theta = 0$ の 2 つの解 (重解を含む) がともに負であるような θ の値の範囲を定めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

3 1 辺が 1 の正五角形 ABCDE に 5 本の対角線を引き、対角線の交点を右図のように P, Q, R, S, T とする。

(1) 対角線 AC の長さを求めよ。

(2) 五角形 PQRST と正五角形 ABCDE の面積比を求めよ。

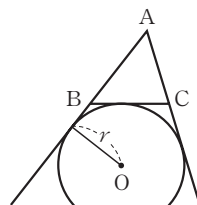
(3) (1) の結果を利用して、 $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$ の値を求めよ。



4 右図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC と、辺 AB, AC の延長の 3 つに接する円 O の半径を r , $\triangle ABC$ の面積を S とする。

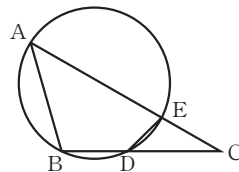
(1) $S = \frac{1}{2} r(b+c-a)$ であることを示せ。

(2) $a=8$, $b=7$, $c=9$ のとき、 r の値を求めよ。



5 $\triangle ABC$ において、 $a+b+c=8$, $C=120^\circ$ のとき、 c のとりうる値の範囲を求めよ。

6 $AB=8$, $BC=12$, $CA=16$ の $\triangle ABC$ がある。点 A, B を通り、半径が $4\sqrt{2}$ の円と辺 BC, AC との交点をそれぞれ D, E とする。DE の長さを求めよ。



7 $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC = \theta$, 外接円の半径を R , 内接円の半径を r とする。

(1) r を a , b , c および θ を用いて表せ。

(2) $a=1$, $b=c$ のとき、 $\frac{r}{R}$ の最大値を求めよ。

8 1 辺が 1 の立方体がある。この立方体を 1 つの対角線に垂直な平面で切るとき、切り口の面積の最大値を求めよ。