例題 12　連立不等式の表す領域②　（和集合）

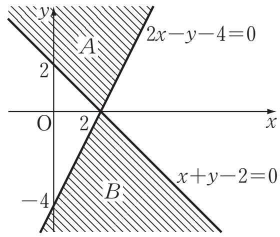
不等式 $(x+y-2)(2x-y-4)<0$ の表す領域を図示せよ．

解　与えられた不等式が成り立つことは，

$$\begin{cases} x+y-2>0 \\ 2x-y-4<0 \end{cases} \cdots ①\quad \text{または}\quad \begin{cases} x+y-2<0 \\ 2x-y-4>0 \end{cases} \cdots ②$$

が成り立つことと同値である．

よって，求める領域は，①の表す領域 A と②の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，右図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



26 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$(x+y+1)(x-y+3)>0$　　(2)　$(x-y-5)(x+2y-2)\leqq 0$

(3)　$(x+y-6)(y-x^2)<0$　　(4)　$(x+y-4)(x^2+y^2-16)\geqq 0$

例題 13　領域と最大・最小

x，y が次の４つの不等式を満たすとき，下の問いに答えよ．

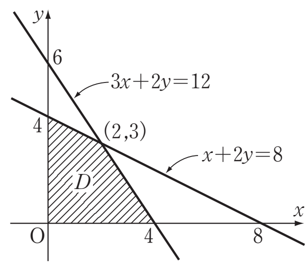
$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y\leqq 8$，$3x+2y\leqq 12$

(1)　４つの不等式の表す領域を D とする．D を図示せよ．

(2)　$x+y$ の最大値および最小値を求めよ．

解　(1)　２直線 $x+2y=8$，$3x+2y=12$ の交点の座標は，この２式を連立方程式として解いて，$(2,\ 3)$

よって，領域 D は，４点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周および内部で，右図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

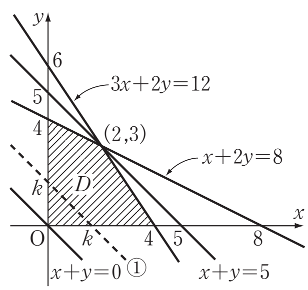


(2)　$x+y=k \cdots ①$とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す．この直線①が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい．

右図から，k の値は，直線①が点 $(2,\ 3)$ を通るとき最大となり，原点 O を通るとき最小となる．

よって，$x+y$ は，$x=2$，$y=3$ のとき，**最大値 5**

$x=0$，$y=0$ のとき，**最小値 0**



27 x，y が次の４つの不等式を満たすとき，下の問いに答えよ．

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y\leqq 10$，$2x+3y\leqq 18$

(1)　４つの不等式の表す領域を D とする．D を図示せよ．

(2)　$x+y$ の最大値および最小値を求めよ．

●ポイント

①　$AB>0 \Longleftrightarrow A>0,\ B>0$ または $A<0,\ B<0$　$AB<0 \Longleftrightarrow A>0,\ B<0$ または $A<0,\ B>0$

②　直線が境界となる領域における最大値，最小値を調べるときは，直線の交点に着目する．

28 x，y が次の 3 つの不等式を満たすとき，下の問いに答えよ．

$$x+y \leqq 3,\quad x-2y \leqq 0,\quad 2x-y \geqq -6$$

(1)　3 つの不等式の表す領域を D とする．D を図示せよ．

(2)　$y-x$ の最大値および最小値を求めよ．

29 $x^2+y^2 \leqq 5$ のとき，$x+2y$ の最大値および最小値とそのときの x，y の値を求めよ．

30 $y \geqq x^2-2x+1$ のとき，$2x-y$ の最大値とそのときの x，y の値を求めよ．

例題 14　線形計画法

ある工場で，製品 A，B をそれぞれ 1 トンずつ作るのに必要な原料 a，b の量は右表のとおりである．ただし，原料 a，b は 1 日に，それぞれ 8 トン，9 トンまでしか使えないものとする．このとき，製品 A と B の 1 日あたりの合計生産量の最大値を求めよ．

	原料 a	原料 b
製品A	2 トン	1 トン
製品B	1 トン	3 トン

解　製品 A，B をそれぞれ x トン，y トン作るとすると，条件から，

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$x+3y \leqq 9$

また，A と B の合計生産量は $x+y$（トン）である．

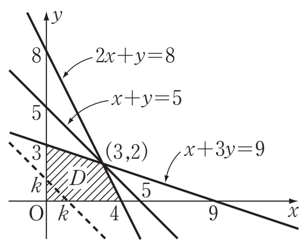
そこで，上の 4 つの不等式の表す領域を D とするとき，D における $x+y$ の最大値を求めればよい．

領域 D は右図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

$x+y=k$ とおくと，この直線が点 $(3,\ 2)$ を通るとき k の値は最大になる．

よって，$x=3$，$y=2$ のとき，$x+y$ の最大値 5

ゆえに，求める最大値は **5 トン**



31 ある商店で，商品 A，B をそれぞれ 1 kg ずつ作るのに必要な材料 a，b の量は右表のとおりである．ただし，材料 a，b は 1 日に，それぞれ 26kg，20kg までしか使えないものとする．このとき，商品 A，B の 1 日あたりの合計作成量の最大値を求めよ．

	材料 a	材料 b
商品A	3 kg	5 kg
商品B	4 kg	2 kg

32 2 種類の薬品 A，B がある．それぞれの 1 g について，成分 a，b の含有量と価格は，それぞれ右表のとおりである．成分 a を 24mg 以上，成分 b を 15mg 以上とる必要があるとき，その費用を最小にするには，薬品 A，B をそれぞれ何 g 買えばよいか．

	成分 a	成分 b	価格
薬品A	3 mg	1 mg	5円
薬品B	2 mg	3 mg	10円

●ポイント

①　円や放物線が境界となる領域における最大値，最小値を調べるときは，判別式を使う．

②　いくつかの 1 次不等式で与えられる領域のもとで，1 次式の最大，最小を考える問題を，線形計画法の問題という．

例題 15　絶対値を含む不等式の領域

次の不等式の表す領域を図示せよ．

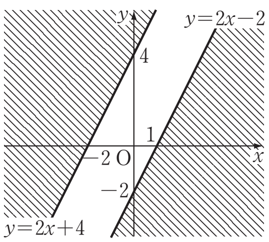
(1)　$|2x-y+1|>3$　　　　(2)　$|x|+|y|\leqq 1$

解　(1)　$2x-y+1<-3$ または $3<2x-y+1$

$2x-y+1<-3$ より，$y>2x+4$

$3<2x-y+1$ より，$y<2x-2$

よって，求める領域は，下図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



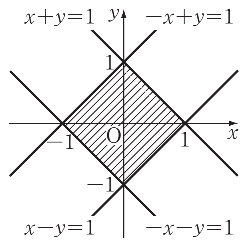
(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，$x+y\leqq 1$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき，$x-y\leqq 1$

$x<0$，$y\geqq 0$ のとき，$-x+y\leqq 1$

$x<0$，$y<0$ のとき，$-x-y\leqq 1$

よって，求める領域は，下図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



33　次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$y\geqq |2x-6|$　　　　(2)　$|x-y+1|<2$

(3)　$|x^2+y^2-5|\leqq 4$　　　　(4)　$|x-2|+|y+1|>3$

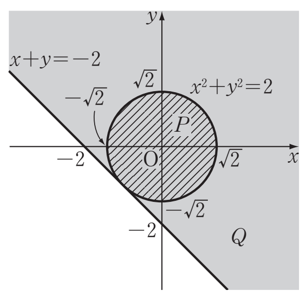
例題 16　領域と証明

$x^2+y^2\leqq 2$ ならば $x+y\geqq -2$ であることを証明せよ．

解　不等式 $x^2+y^2\leqq 2$ の表す領域を P，不等式 $x+y\geqq -2$ の表す領域を Q とする．

P は円 $x^2+y^2=2$ の周および内部，Q は直線 $x+y=-2$ およびその上側の部分である．

原点 O と直線 $x+y=-2$ の距離は，$\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$ となり，これは円 $x^2+y^2=2$ の半径に等しいから，直線 $x+y=-2$ は円 $x^2+y^2=2$ の接線である．



したがって，P，Q は右図のようになり，$P\subset Q$ である．

よって，$x^2+y^2\leqq 2$ ならば $x+y\geqq -2$ である．

34　$x^2+y^2<4$ ならば $x+y<2\sqrt{2}$ であることを証明せよ．

35　$x^2+y^2\leqq x$ ならば $x^2+y^2\leqq 1$ であることを証明せよ．

●ポイント

①　2 つの条件 p，q について，p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると，次のことが成り立つ．

「$p\Rightarrow q$ が真である」$\Longleftrightarrow$ $P\subset Q$

混合問題

A

1 点 A(3, 0) を通り，直線 $y=-2$ に接する円の中心 P の軌跡を求めよ．

2 直線 $x-2y+1=0$ と点 A(4, −3) がある．点 Q がこの直線上を動くとき，線分 AQ を 3：5 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

3 円 $x^2+y^2-8x-8y+16=0$ と直線 $y=kx$ が異なる 2 点 A，B で交わるとき，弦 AB の中点 P の軌跡を求めよ．

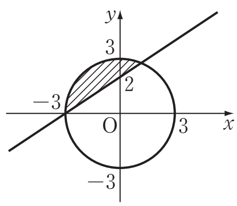
4 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $y>\dfrac{2}{3}x-5$　　(2) $x^2+y\leqq 2,\ y+x>0,\ y-x<0$

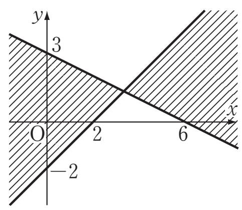
(3) $(x+y+1)(x^2+y^2-4)<0$　　(4) $xy\leqq 1$

5 次の図の斜線部分は，どのような不等式で表されるか．ただし，境界線を含まない．

(1)



(2)



B

6 u，v が $u^2+v^2=4$ を満たすとき，点 $(u+v,\ uv)$ の軌跡を求めよ．

7 定数 k の値が変化するとき，2 直線 $kx-y+5k=0$，$x+ky-5=0$ の交点 P の軌跡を求めよ．

8 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $xy(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)<0$　　(2) $x^2+y^2-2|x-1|-2|y+1|\leqq 0$

9 2 次方程式 $x^2-2ax+b=0$ が 0 より大きく 2 より小さい異なる 2 つの実数解をもつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を ab 平面上に図示せよ．

10 x，y が 3 つの不等式 $x+y\geqq 2$，$x+2y\leqq 6$，$4x+y\leqq 17$ を満たすとき，x^2+y^2 の最大値および最小値を求めよ．

■ヒント

6 $u+v=x$，$uv=y$ とおく．u，v が存在する点 $(x,\ y)$ の範囲に注意する．

8 (1) 境界線をこえるごとに，不等式の左辺の符号が変わっていくことに着目する．

章末問題 A

1 2 点 A$(-3,\ 5)$，B$(2,\ -4)$ に対して，次の点の座標を求めよ．

(1) 線分 AB を 2：3 に内分する点 C，外分する点 D

(2) 直線 $2x-y+6=0$ に関して点 A と対称な点 A′

2 3 点 A$(1,\ 6)$，B$(-3,\ 4)$，C$(5,\ 2)$ を頂点とする△ABC について，次の問いに答えよ．

(1) 外心の座標を求めよ．　　(2) 面積を求めよ．

3 次の 3 直線が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ．

$x+2y+m=0$，$x+3y+1=0$，$2x+my+m-9=0$

4 2 直線 $2x-y-2=0$，$3x-2y-1=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(2,\ 5)$ を通る．　　(2) 直線 $y=3x$ に垂直である．

5 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ．

原点 O から直線 $x+y-2=0$ までの距離は $\boxed{ア}$ である．したがって，円 $x^2+y^2=1$ の円周上の点から直線 $x+y-2=0$ までの距離の最小値は $\boxed{イ}$ である．

6 次の円の方程式を求めよ．

(1) 中心が直線 $x-3y-4=0$ 上にあって，2 点 $(1,\ 4)$，$(-3,\ 2)$ を通る円

(2) 2 円 $x^2+y^2-2y-2=0$，$x^2+y^2+4x-4y-3=0$ の共有点と点 $(2,\ 1)$ を通る円

7 次の直線の方程式を求めよ．

(1) 円 $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ 上の点 $(-3,\ 5)$ における接線

(2) 点 $(5,\ 2)$ を通り，円 $x^2+y^2-6x+8y+17=0$ に接する直線

8 円 $x^2+y^2=9$ と 2 点 A$(1,\ 5)$，B$(-4,\ 1)$ がある．点 Q がこの円上を動くとき，△ABQ の重心 P の軌跡を求めよ．

9 2 つの放物線 $y=x^2$ …①，$y=-x^2-2ax+a-4$ …②について，次の問いに答えよ．

(1) 定数 a の値が変化するとき，放物線②の頂点 P の軌跡を求めよ．

(2) 2 つの放物線①，②が異なる 2 点 A，B で交わるとき，線分 AB の中点 M の軌跡を求めよ．

10 円 $(x-a)^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+b$ が異なる 2 点で交わるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を ab 平面上に図示せよ．

11 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y \leqq 0 \\ x+2y-4 \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．　　(2) D における $x+3y$ の最大値および最小値を求めよ．

章末問題 B

1 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ．

(1) 2 直線 $(a-2)x+ay+2=0$，$x+(a-2)y+1=0$ が平行(一致する場合を除く)となるとき，$a=\boxed{ア}$ であり，垂直となるとき，$a=\boxed{イ}$ である．

(2) 直線 $(4a-3)y=(3a-1)x-1$ は必ず点 $(\boxed{ア}, \boxed{イ})$ を通る．また，この直線が第 2 象限を通らないためには，$a \geqq \boxed{ウ}$ でなければならない．

2 次の問いに答えよ．

(1) 3 点 O$(0, 0)$，A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) を頂点とする△OAB の面積は，$\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ と表されることを示せ．

(2) 放物線 $y=-x^2+8x-18$ と点 P$(2, 4)$ がある．点 Q をこの放物線上にとるとき，△OPQ の面積の最小値と，そのときの Q の座標を求めよ．

3 2 円 $x^2+y^2=4$ …①，$(x-5)^2+y^2=9$ …②の両方に接する直線の方程式を求めよ．

4 2 円 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2+2x-2y=0$ の交点を通り，直線 $2x+y-6=0$ から切り取る弦の長さが 6 となるような円の方程式を求めよ．

5 放物線 $y=x^2$ …①と直線 $y=ax+b$ …②について，次の問いに答えよ．

(1) ①と②が異なる 2 点 P，Q で交わり，かつ P，Q の x 座標の差が 2 となるための a，b についての条件を求めよ．

(2) 点 P，Q における①の接線をそれぞれ ℓ，m とし，ℓ と m の交点を R とする．a，b が(1)で求めた条件を満たしながら変化するとき，点 R の軌跡を求めよ．

6 直線 $\ell : y=ax+2$ と 2 円 $C : x^2+y^2=1$，$C' : x^2+y^2=2$ がある．次の問いに答えよ．

(1) ℓ が C' に接するときの定数 a の値を求めよ．

(2) ℓ が C と共有点をもたず，C' と異なる 2 点 A，B で交わるような定数 a の値の範囲を定めよ．

(3) (2)のとき，C' の弦 AB の中点 P の軌跡を求めよ．

7 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-3 \leqq 0 \\ (x^2-1)(y^2-1) \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とするとき，D の面積を求めよ．

8 次の領域を図示せよ．

(1) a がどんな実数であっても，放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が通らない領域

(2) a が 1 以下のすべての実数を動くとき，円 $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2+4$ が動く領域

9 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ．

$X=3x+2y$，$Y=2x+y$ のとき，$x=-X+\boxed{ア}Y$，$y=2X+\boxed{イ}Y$ である．また，x，y が 2 つの不等式 $4x+3y \geqq 5$，$9x+5y \leqq 6$ を満たすとき，$(3x+2y)^2+(2x+y)^2$ の最小値は $\boxed{ウ}$ である．