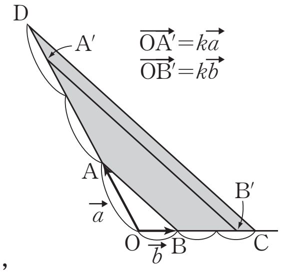
例題 9　点の存在範囲②

O，A，B が定点で，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．$\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}$ について，m，n が $1\leqq m+n\leqq 3$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$ を満たすとき，点 P の存在範囲を図示せよ．

解　$m+n=k\ (k>0)$ とおき，両辺を k で割って，$\dfrac{m}{k}+\dfrac{n}{k}=1$



ここで，$\dfrac{m}{k}=m'$，$\dfrac{n}{k}=n'$ とおくと，$m'+n'=1$ ……①

$\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}=m'k\vec{a}+n'k\vec{b}=m'(k\vec{a})+n'(k\vec{b})$

$k\vec{a}=\overrightarrow{OA'}$，$k\vec{b}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと，$\overrightarrow{OP}=m'\overrightarrow{OA'}+n'\overrightarrow{OB'}$ と

①および，$m'\geqq 0$，$n'\geqq 0$ より，P は線分 A′B′ 上を動く．

更に，A′，B′ はそれぞれ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を k 倍した延長線上を動くから，

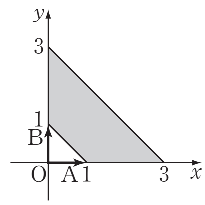
$1\leqq k\leqq 3$ より，P は右の図のような台形 ABCD の周上と内部を動く．

ただし，C は $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OB}$，D は $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}$ を満たす点である．

〔注〕　存在範囲の図を簡単に類推するには，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,\ 1)$ と定めて考える．

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ より，

$(x,\ y)=m(1,\ 0)+n(0,\ 1)=(m,\ n)$ となり，m，n の条件と x，y の条件が一致する．そこで，$1\leqq x+y\leqq 3$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の領域を図示すると，右の図の影をつけた部分になる．ただし，境界線を含む．



このような特別な $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ での図を参考にして考えるとわかり易く，結果が早く類推できる．

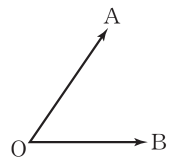
29 次の問いに答えよ．

(1)　O を座標平面上の原点とし，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,\ 1)$ とする．$P(x,\ y)$ に対し，$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ とおく．m，n が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を図示せよ．

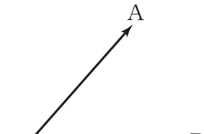
(ア)　$0<m+n<1$，$m>0$，$n>0$　　　(イ)　$0\leqq 2m-n\leqq 1$

(ウ)　$-1\leqq m+n\leqq 2$，$mn\geqq 0$

(2)　(1)で求めた(ア)〜(ウ)の図を参考にして，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ が右の図のように与えられたとき，$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ で与えられる点 P の存在範囲を(1)の(ア)〜(ウ)の条件で図示せよ．



30 O，A，B は定点とし，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ で与えられる点 P について，α，β が，$1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$，$0\leqq\alpha\leqq 1$，$0\leqq\beta\leqq 1$ を満たすとき，点 P の存在範囲を図示せよ．



●ポイント

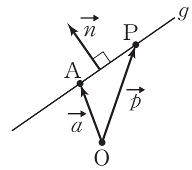
①　$\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}$，$Am+Bn=C\ (C\neq 0)$ のとき，P の存在範囲を図示するには，

$m'=\dfrac{A}{C}m$，$n'=\dfrac{B}{C}n$，$\vec{a'}=\dfrac{C}{A}\vec{a}$，$\vec{b'}=\dfrac{C}{B}\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{OP}=m'\vec{a'}+n'\vec{b'}$，$m'+n'=1$ で考える．

例題 10　内積とベクトル方程式

「定点A$(\vec{a})$を通り，$\vec{0}$でないベクトル$\vec{n}$に垂直な直線をgとする．このとき，g上の任意の点をP$(\vec{p})$とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$より，内積を用いて，$\boldsymbol{\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0}$と表せる．」
これも直線gのベクトル方程式であり，$\vec{n}$を**法線ベクトル**という．

このことを用いて，点$(-2,\ 1)$を通り，$\vec{n}=(3,\ -2)$が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ．



解　$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{p}=(x,\ y)$とすると，
$\vec{p}-\vec{a}=(x+2,\ y-1)$だから，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$より，
$3(x+2)-2(y-1)=0$　これより，$\boldsymbol{3x-2y+8=0}$

31 次の点Aを通り，$\vec{n}$が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ．
(1)　A$(2,\ 4)$，$\vec{n}=(5,\ 3)$　　(2)　A$(-4,\ -1)$，$\vec{n}=(-3,\ -1)$

32 直線$2x-5y+7=0$に平行で，点A$(2,\ 4)$を通る直線の方程式を求めよ．

33 原点Oと異なる定点をAとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$とする．動点Pに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$とするとき，$\vec{p}$が次の等式を満たす場合，Pはどんな図形を描くか．
(1)　$(2\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0$　　(2)　$|\vec{p}+\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{a}|$

34 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$を定点とするとき，等式$2\vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$を満たす点P$(\vec{p})$はどんな図形上にあるか．

例題 11　2直線のなす角

2直線$x-2y+4=0$，$3x-y=6$のなす鋭角を求めよ．

解　2直線のなす角は，おのおのの直線に垂直なベクトル（法線ベクトル）である$(1,\ -2)$，$(3,\ -1)$のなす角に等しい．

なす角をθとすると，$\cos\theta=\dfrac{1\cdot3-2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\theta=45^\circ$より，2直線のなす鋭角は$\boldsymbol{45^\circ}$

〔注〕　$\cos\theta<0$で，θが鈍角で求まったときは，鋭角は$180^\circ-\theta$から求めればよい．

●ポイント

①　直線$ax+by+c=0$に$\begin{cases}\text{平行なベクトルは，}(-b,\ a),\ (b,\ -a) & \textbf{(方向ベクトル)}\\ \text{垂直なベクトルは，}(a,\ b),\ (-a,\ -b) & \textbf{(法線ベクトル)}\end{cases}$

②　ベクトル$(p,\ q)$に垂直で点$(a,\ b)$を通る直線は，$\boldsymbol{p(x-a)+q(y-b)=0}$

③　$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のなす角をθとすると，

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

35 次の2直線のなす鋭角を求めよ．

(1)　$x+\sqrt{3}y-1=0$，$x-\sqrt{3}y+4=0$

(2)　$2x+3y+1=0$，$3x-2y-4=0$

36 次の問いに答えよ．

(1)　2直線 $2x+y=5$，$ax+(a+1)y+2=0$ のなす鋭角が 45° となるように a の値を定めよ．

(2)　点 $(-\sqrt{3},\ 1)$ を通り，直線 $\sqrt{3}x+y=2$ とのなす鋭角が 30° である直線の方程式を求めよ．

例題 12　円のベクトル方程式

平面上に動点Pと，3定点A，B，Cがある．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　等式 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=6$ を満たす点Pはどんな図形上にあるか．

(2)　(1)のとき，$P(x,\ y)$，$A(1,\ 1)$，$B(2,\ 4)$，$C(6,\ 10)$ とする．x，y の関係式を求めよ．

解　(1)　$P(\vec{p})$，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とすると，条件式は，

$|(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})|=6$，$|3\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})|=6$

両辺を3で割ると，$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=2$ ……①

よって，**Pは△ABCの重心を中心とし，半径2の円周上にある．**

(2)　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=(3,\ 5)$ だから，$\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=(x-3,\ y-5)$

よって，①より，$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2$　両辺を2乗すると，

$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-5)^2=4}$

37 $A(2,\ 3)$ を中心とし，$B(5,\ -1)$ を通る円の方程式を求めよ．

38 平面上の2定点A，Bに対し，次の等式を満たすような点Pの軌跡を求めよ．

(1)　$|2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}|=15$

(2)　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=c^2$（$c$ は定数）

39 △ABCの外心をO，外接円の半径を1とする．$4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ であるとき，辺ABの長さを求めよ．

40 平面上で $\vec{c}$ を定点Cの，$\vec{p}$ を動点Pの位置ベクトルとする．Cを中心とする半径 r の円周上の点 $P_1(\vec{p_1})$ における接線の方程式は，$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p_1}-\vec{c})=r^2$ で表されることを証明せよ．

41 Oを原点とする座標平面上で，$A(1,\ 1)$ に対し，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\leqq 2$，$|\overrightarrow{AP}|^2\leqq 5$ を満たす点Pの存在範囲を図示せよ．

●ポイント

①　$A(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円のベクトル方程式は，$|\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{a}}|=\boldsymbol{r}$

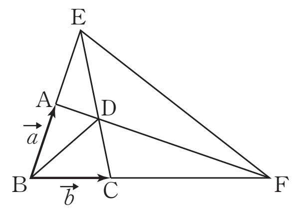
$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(a,\ b)$ とすると，円の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

混 合 問 題

A

1 同一平面上に異なる3点O，A，Bがあって，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ とする．
$\overrightarrow{OD}=3\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=2\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\vec{a}-3\vec{b}$ で定まる3点D，E，Fは一直線上にあることを示せ．

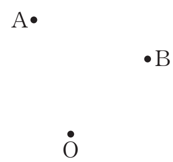
2 対辺がともに平行でない四角形ABCDの辺BAの延長上に点Eを，辺BCの延長上に点Fをそれぞれ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}$，$2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CF}$ となるようにとり，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とおく．線分AFとCEの交点がDとなるとき，次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{BD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) △AEDと△CFDの面積の比を求めよ．

3 右の図のように，3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ で定まる点Pが次の条件を満たすとき，点Pの存在範囲を図示せよ．



(1) $2m+3n=1$，$-1\leqq n\leqq 1$

(2) $1\leqq m-2n\leqq 2$

4 Oを原点とする平面上の動点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とし，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を定点とする．このとき，等式 $|2\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}+\vec{b}|$ を満たす点Pの軌跡を求めよ．

B

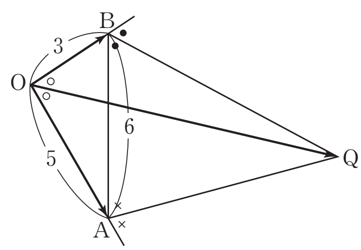
5 四角形ABCDは，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) 点Eが，$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{EA}$ を満たすとき，点Eはどのような点か．

(2) 実数 r が，$-1\leqq r\leqq 1$ の範囲を動くとき，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=r\overrightarrow{PA}$ を満たす点Pはどんな図形を描くか．

(3) 辺BCの中点をMとする．(2)において，3点D，P，Mが一直線上にあるときの r の値を求めよ．

6 OA＝5，AB＝6，BO＝3である△OABがある．このとき，次の問いに答えよ．



(1) △OABの∠O内の傍心（∠Oの二等分線と∠Bおよび∠Aの外角の二等分線の交点）をQとするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2) 線分OQの長さを求めよ．

■ヒント

5 始点をAにそろえ，$\overrightarrow{AE}$ や $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AC}$ で表してみる．

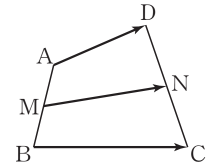
6 OBの延長上にOB＝BDとなる点Dをとり，BQとADとの交点をSとして考える．

章末問題 A

1 四角形 ABCD の辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とするとき，

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

であることを証明せよ．



2 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 1)$ のとき，次の条件を同時に満たす $\vec{x}$ の成分を求めよ．

$(\vec{x}-\vec{b})\,/\!/\,\vec{a}$，$|\vec{x}+\vec{b}|=13$

3 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ が，等式 $|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2=2\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$ を満たすとき，△ABC の形状を調べよ．

4 座標平面上に 3 点 O(0，0)，A(2，3)，B(6，1) がある．点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$2s+3t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ (s，t は実数) で表されているとき，点 P の存在範囲を図示せよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|t\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-t\vec{b}|$ $(t\neq 0)$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ $(0°\leqq\theta\leqq 90°)$ を求めよ．

(2) $\vec{a}=(0,\ 3)$ となす角が 60° で大きさが 2 のベクトルを $\vec{b}$ とする．2 つのベクトル $t\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}-t\vec{b}$ が直交するとき，実数 t の値を求めよ．

6 O，A，B は一直線上にないとする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように点 C，D をとり，AD，BC の交点を E とする．このとき，次の問いに答えよ．

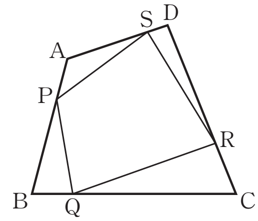
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(2) OE，AB，CD のそれぞれの中点 P，Q，R は一直線上にあることを示せ．

7 △ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，辺 AC を 3：1 に内分する点を E とする．また，2 つの線分 CD と BE の交点を P とし，直線 AP と辺 BC の交点を Q とする．このとき，BP：PE，CP：PD，AP：PQ を求めよ．

章末問題 B

1 平行四辺形でない四角形ABCDの辺AB，BC，CD，DA上にそれぞれ点P，Q，R，Sを AP：AB＝CR：CD＝α：1，BQ：BC＝DS：DA＝β：1となるようにとるとき，次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{PQ}$を$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{BC}$で表せ．

(2) 四角形PQRSが平行四辺形になるための条件をα，βで表せ．

2 次の問いに答えよ．

(1) xy平面上の点$(1,\ -1)$を通り，$\vec{u}=(2,\ 1)$を方向ベクトルとする直線lの方程式をx，yを用いて表せ．

(2) (1)の直線lと直交し，点$(-4,\ 2)$からの距離が1である直線の方程式をx，yを用いて表せ．

3 OA＝$\sqrt{3}$，OB＝$\sqrt{5}$，AB＝$\sqrt{6}$の△OABの外心をPとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$として，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ．

4 AB＝4，BC＝5，CA＝6の△ABCの重心をG，Gから辺BCに下ろした垂線の足をHとする．このとき，$\dfrac{\mathrm{HC}}{\mathrm{BC}}$の値を求めよ．

5 3定点A，B，Cに対し，次の等式を満たす点Pの軌跡を求めよ．

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=0$$

6 平面上に4点O，A，B，Cがあり，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，OA＝1，OB＝2，OC＝$\sqrt{2}$のとき，△ABCの面積を求めよ．

7 △ABCの辺BC上に点Dがあり，次の等式が成り立っているとき，点Dはどのような点か．

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2$$