例題 7　軌跡と領域

不等式 $|z-1|\leqq|z|\leqq1$ を満たす z が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

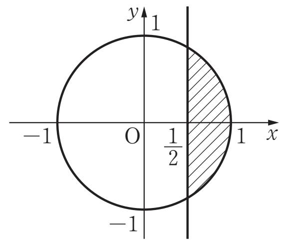
解　この不等式は，$|z-1|\leqq|z|$ ……① かつ $|z|\leqq1$ ……②と同値である．

P(z)，A(1) とおけば，①は，AP≦OP となり，点Pが OA の垂直二等分線 ℓ に関して点A と同じ側（ℓ 上の点も含む）にあることを表す．

また，②は，OP≦1 となり，点Pが原点を中心とする半径１の円の内部または周上にあることを表す．

以上により，点 z の存在範囲は右図の斜線部分になる．

ただし，境界も含む．



16 次の不等式を満たす z が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

(1)　$2<|z|<|z-4i|$

(2)　$|z|\leqq3$，$|z+3|\leqq3|z-1|$

(3)　$\sqrt{2}\,|z-2|\leqq|z-3|\leqq|z-1|$

(4)　$|z-2|<|z+2i|$，$0<z+\overline{z}<4$

17 複素数 z の実部が１以上のとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される複素数 w が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

18 不等式 $|z|\leqq1$，$(1-i)z+(1+i)\overline{z}\geqq2$ をともに満たす z が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

例題 8　実数・純虚数条件と図形

複素数平面上に，３点 A(1)，B$(3i)$，C$(a+i)$ がある．ただし，a は実数とする．

(1)　３点 A，B，C が一直線上にあるような a の値を求めよ．

(2)　AB⊥AC となるような a の値を求めよ．

解　$\alpha=1$，$\beta=3i$，$\gamma=a+i$ とおくと，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{a-1+i}{-1+3i}=\frac{(a-1+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{4-a+(2-3a)i}{10}\ \cdots\cdots①$$

(1)　①が実数となればよい．よって，(虚部)＝0 より，$2-3a=0$，$\boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}}$

(2)　①が純虚数となればよい．よって，(実部)＝0 より，$4-a=0$，$\boldsymbol{a=4}$

●ポイント

① 円 $|z-\alpha|=r$ を C とすれば，$|z-\alpha|<r$，$|z-\alpha|>r$ はそれぞれ点 z が C の内部，外部にあることを表す．

② $|z-\alpha|<|z-\beta|$ は，点 z が２点 α，β を結ぶ線分の垂直二等分線に関して点 α と同じ側にあることを表す．

③ **16** (2)　第２式については，両辺を２乗して考える．

④ **18** 第２式については，$z=x+yi$ とおいて考えるとよい．

19 複素数平面上に，3 点 A$(-2+i)$，B(-4)，C$(-1+ai)$ がある．ただし，a は実数とする．

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるような a の値を求めよ．

(2)　AB⊥AC となるような a の値を求めよ．

20 複素数平面上に，4 点 A(1)，B$(-3+3i)$，C(-4)，D(ai) がある．ただし，a は実数とする．

(1)　AB∥CD となるような a の値を求めよ．

(2)　AB⊥CD となるような a の値を求めよ．

21 次の問いに答えよ．

(1)　複素数平面上に，3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする△ABC がある．辺 BC を 5：2 に内分する点を P，辺 AB を 3：5 に内分する点を Q，△ABC の重心を G とするとき，3 点 P，Q，G は一直線上にあることを示せ．

(2)　α，β は $|\alpha|=|\beta|=1$，$\alpha \neq \pm\beta$ を満たすとする．複素数平面上の 3 点を A(α)，B(β)，C$(\alpha^2\overline{\beta})$ とするとき，OA⊥BC であることを示せ．

例題 9　三角形の形状判定

複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\sqrt{3}\,i$ が成り立つとき，△ABC の 3 つの角の大きさを求めよ．

解　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ が純虚数なので，BA⊥BC であり，$\angle \mathbf{B}=\dfrac{\pi}{2}$

また，$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=\sqrt{3}$ より，$|\alpha-\beta|=\sqrt{3}\,|\gamma-\beta|$，BA$=\sqrt{3}$ BC

よって，AB：BC$=\sqrt{3}$：1 より，$\angle \mathbf{A}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle \mathbf{C}=\dfrac{\pi}{3}$

22 複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，次の等式が成り立つとき，△ABC の 3 つの角の大きさを求めよ．

(1)　$\alpha-\beta=i(\gamma-\beta)$

(2)　$\alpha-\gamma=(1+\sqrt{3}\,i)(\beta-\gamma)$

(3)　$(1+i)\alpha=\beta+i\gamma$

(4)　$(\beta-\gamma)^2=(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)$

23 複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，次の等式が成り立つとき，△ABC の 3 辺の比を求めよ．

(1)　$4(\gamma-\beta)=3i(\beta-\alpha)$

(2)　$\gamma+2\sqrt{2}\,i\alpha=(1+2\sqrt{2}\,i)\beta$

●ポイント

①　異なる 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) に対し，

3 点 A，B，C が一直線上 $\Longleftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **が実数**　　　**AB⊥AC** $\Longleftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **が純虚数**

AB∥CD $\Longleftrightarrow \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ **が実数**　　　**AB⊥CD** $\Longleftrightarrow \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ **が純虚数**

例題 10　図形と証明

複素数平面上に異なる４点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) がある．$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ かつ $(\delta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$ が成り立つとき，四角形 ABCD は正方形であることを証明せよ．

解　$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ より，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$ ……①

また，$(\delta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$ より，$\left(\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1$，$\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$ ……②

①より，対角線 AC，BD の中点が一致するから，四角形 ABCD は平行四辺形である．

また，②より，$\dfrac{|\delta-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=\left|\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ かつ $\arg\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow$ AB＝AD かつ $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに，四角形 ABCD は正方形である．

24 複素数平面上に異なる４点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) があり，$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ ……①が成り立っている．このとき，四角形 ABCD について，次の問いに答えよ．

(1)　①かつ $(\delta-\alpha)^2+3(\beta-\alpha)^2=0$ のとき，この四角形は長方形であることを証明せよ．

(2)　①かつ $(\gamma-\alpha)^2+4(\delta-\beta)^2=0$ のとき，この四角形はひし形であることを証明せよ．

25 複素数平面上の異なる４点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形が正方形であるための必要十分条件は，「$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ かつ $(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2=0$」であることを証明せよ．

26 複素数平面上の異なる３点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする三角形が正三角形であるための必要十分条件は，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ であることを証明せよ．

27 複素数平面上で，原点と点 $\alpha\ (\neq 0)$ を通る直線を ℓ とする．

(1)　点 z が ℓ 上の点であるための必要十分条件は，$\overline{\alpha}z=\alpha\overline{z}$ であることを証明せよ．

(2)　２点 z_1，z_2 が ℓ に関して対称であるための必要十分条件は，$\overline{\alpha}z_1=\alpha\overline{z_2}$ であることを証明せよ．

(3)　$\alpha=2-i$ とするとき，点 $-1-4i$ と ℓ に関して対称な点を表す複素数を求めよ．

28 絶対値が等しい異なる４つの複素数の和が０であるとき，これら４つの複素数は複素数平面上で長方形をなすことを証明せよ．

●**ポイント**

①　**26**　△ABC が正三角形 $\Longleftrightarrow |\beta-\alpha|=|\gamma-\alpha|$ かつ $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{3}$

②　**28**　例えば，４つの複素数を α，β，γ，δ（原点を中心とする円周上に反時計回りに並ぶ）などと定める．また，複素数の性質を使うとともに，初等幾何的なアプローチも行うとよい．

混合問題

A

1 単位円上を動く点，直線 $|z-1|=|z-3-2i|$ 上を動く点を表す複素数をそれぞれ w_1，w_2 とするとき，$|w_2-w_1|$ の最小値を求めよ．

2 複素数平面上の点 z，w が $w=\dfrac{iz}{z-2}$ を満たすとする．

(1) 点 z が虚軸上を動くとき，点 w はどんな図形を描くか．

(2) w の虚部が 0 以上 1 以下となるような点 z が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

3 $\alpha \neq \beta$ のとき，複素数平面上で，$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\beta})=(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\alpha})$ を満たす点 z が描く図形は直線であることを示せ．

4 単位円上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする三角形が正三角形となるための必要十分条件は，$\alpha+\beta+\gamma=0$ であることを証明せよ．

B

5 複素数平面上で，原点を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円を C とし，点 α が C 上を動くとする．

(1) $i\overline{\alpha}+\overline{i\overline{\alpha}}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) 点 α における円 C の接線を ℓ_α とする．点 z が ℓ_α 上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z-i}$ で表される点 w は円を描くことを示し，この円の半径を r_α とするとき，r_α のとり得る値の範囲を求めよ．

6 3 点 A(α)，B(β)，P(z) があり，点 P は △OAB の外心で，$\alpha\beta=iz$ を満たすとする．

(1) α が満たすべき条件を求め，点 A が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2) 点 z が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

7 複素数平面上に，どの 3 点も一直線上にない異なる 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) がある．

(1) 4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるための必要十分条件は，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\cdot\dfrac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}=$(実数) であることを証明せよ．

(2) 4 点 -3，$3-3i$，$9+3i$，$-1+9i$ は同一円周上にあることを示せ．

■ヒント

5 (2) まず，z が満たす方程式を求める．また，(1)は式変形の際のヒントになっている．

7 (1) 円周角の定理と内接四角形の性質(対角の和が π)を用いる．

章末問題 A

1 次のとき，$1+\cos\theta+i\sin\theta$ を極形式で表せ．ただし，$0\leqq$(偏角)$<2\pi$ とする．

(1) $0<\theta<\pi$　　(2) $\pi<\theta<2\pi$

2 次の問いに答えよ．

(1) $\alpha=\dfrac{\pi}{10}$ とする．$\sin3\alpha=\cos2\alpha$ であることを利用して，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(2) 複素数平面上に，原点と点1を結ぶ線分を1辺とする正五角形がある．他の3つの頂点を表す複素数の虚部がすべて正であるとき，これら3つの複素数を求めよ．

3 a を実数とし，0でない複素数α，β が $\alpha^4-2a\alpha^2\beta^2+(a+6)\beta^4=0$ ……(＊) を満たすとする．(＊)を満たすすべてのα，βについて，複素数平面上で，3点O，A(α)，B(β) が $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形をなすような a の値の範囲を求めよ．

4 1000以下の自然数 n のうち，$\left(\dfrac{-\sqrt{3}+3i}{4+4i}\right)^n$ が負の実数になるものは何個あるか．

5 $w=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $w^4+w^3+w^2+w+1$ の値を求めよ．

(2) $P=|z-1|^2+|z-w|^2+|z-w^2|^2+|z-w^3|^2+|z-w^4|^2$ とする．複素数 z が $|z-1-i|\leqq1$ を満たすとき，P のとり得る値の範囲を求めよ．

6 複素数平面上の原点Oと点A(10)，B$(4+3i)$ を頂点とする△OABの外心，および内心を表す複素数をそれぞれ求めよ．

7 $w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする．複素数平面上で，点 z が点αを中心とする半径1の円上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円を描くという．このようなαと r の組を求めよ．

8 複素数 z が $|z-1|\geqq1$，$z+\bar{z}\geqq2$ をともに満たすとき，$w=\dfrac{2}{z}$ で表される複素数 w が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

9 複素数平面上の単位円上に，異なる4点 z_1，z_2，z_3，z_4 がこの順に並んでいるとき，これら4点が作る四角形の対角線が直交するための必要十分条件は，$z_1z_3+z_2z_4=0$ であることを証明せよ．

章末問題 B

1 複素数平面上の点 z が単位円上を1周するとき，$w=z^3-iz^2$ で表される点 w の軌跡が実軸，および虚軸と交わる回数をそれぞれ求めよ．

2 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，次の式で定める．

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{7}{5}a_n-\frac{8}{5}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_1=1,\ b_{n+1}=\frac{4}{5}a_n-\frac{1}{5}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $a_{n+1}+\beta b_{n+1}=\alpha(a_n+\beta b_n)$ が成立するような複素数 α，β を求めよ．

(2) (1)の β について，$|a_n+\beta b_n|=1$ がすべての n について成り立つことを示せ．

(3) すべての n に対して，$|a_n|\leqq\sqrt{2}$，$|b_n|\leqq 1$ となることを示せ．

3 3次方程式 $3x^3-ax+1=0$（a は実数）の解が次の条件を満たすような a の値の範囲を求めよ．

(1) すべての実数解の絶対値が1より小さい　　(2) すべての解の絶対値が1より小さい

4 方程式 $x^7=1$ の虚数解のうち，虚部が正であるものを z_1，z_2，z_3 とし，その実部をそれぞれ $\mathrm{Re}(z_1)$，$\mathrm{Re}(z_2)$，$\mathrm{Re}(z_3)$ と表す．次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Re}(z_3)=-\dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{Re}(z_1)$，$\mathrm{Re}(z_2)$，$\mathrm{Re}(z_3)$ は3次方程式 $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の解であることを示せ．

5 n を3以上の自然数とし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする．次のことを証明せよ．

(1) $n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})$　　(2) $\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$

6 すべての正の数 r に対して，不等式 $2|rz-1|\geqq\left|rz-\dfrac{i}{2}\right|$ を満たすような複素数 z が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ．

7 実数係数の4次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ は2を解にもち，この方程式の4つの解は複素数平面上で，1つの角が $\dfrac{\pi}{3}$ である円に内接する四角形となり，その面積は $4\sqrt{3}$ になるという．このとき，a，b，c，d の値を求めよ．