

1 放物線の平行移動① ⇒ 頂点の移動を調べる

放物線 $y=x^2+2x+3$ は、どのように平行移動すると放物線 $y=x^2-6x+5$ に重なるか。

解 $y=x^2+2x+3$ ……①, $y=x^2-6x+5$ ……②とする。

放物線①を平行移動して放物線②に重ねると、①の頂点は②の頂点に重なる。

頂点がどう移動するかだけを調べればよい

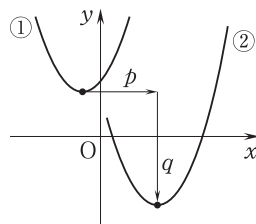
①から、 $y=(x+1)^2+2$, ②から、 $y=(x-3)^2-4$

よって、①の頂点は点 $(-1, 2)$, ②の頂点は点 $(3, -4)$

①を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したとき②に重なるすると、

$-1+p=3$, $2+q=-4$ これより、 $p=3-(-1)=4$, $q=-4-2=-6$

ゆえに、 x 軸方向に 4, y 軸方向に -6 だけ平行移動すればよい。

**2 放物線の平行移動②** ⇒ $x \rightarrow x-p$, $y \rightarrow y-q$

放物線 $y=ax^2+bx+c$ を、 x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動

して得られる放物線の方程式は、 $y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$ ← x を $x-p$, y を $y-q$ でおきかえればよい

放物線 $y=2x^2-8x+5$ を、 x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

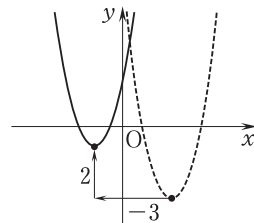
解 $y=2x^2-8x+5$ において、

x を $x+3$, ← $x-p=x-(-3)$

y を $y-2$ でおきかえて、

$y-2=2(x+3)^2-8(x+3)+5$

これを整理して、求める方程式は、 $y=2x^2+4x+1$

**3 放物線の対称移動** ⇒ 符号を変化させておきかえ

放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸, y 軸, 原点に関して対称移動して得られる放物線の方程式は、

x 軸: $-y=ax^2+bx+c$ ← y を $-y$ でおきかえ, x はそのまま → y だけ符号が変化

y 軸: $y=a(-x)^2+b(-x)+c$ ← x を $-x$ でおきかえ, y はそのまま → x だけ符号が変化

原点: $-y=a(-x)^2+b(-x)+c$ ← x を $-x$ で, y を $-y$ でおきかえる → 両方の符号が変化

放物線 $y=x^2-4x+5$ を、次の直線または点に関して、それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1) x 軸

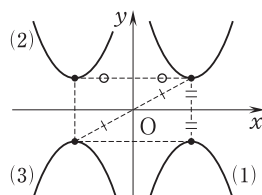
(2) y 軸

(3) 原点

解 (1) $-y=x^2-4x+5$ より、 $y=-x^2+4x-5$

(2) $y=(-x)^2-4(-x)+5$ より、 $y=x^2+4x+5$

(3) $-y=(-x)^2-4(-x)+5$ より、 $y=-x^2-4x-5$



1 2 次関数の最大・最小 ⇒頂点の y 座標に注目

次の 2 次関数の最大値，最小値とそれらを与える x の値を求めよ。

(1) $y=2x^2+8x+3$

(2) $y=-x^2+6x-2$

解 (1) $y=2(x+2)^2-5$ と変形され，グラフは下に凸になる(図 1)。

y の値は頂点で最小となり，また，いくらでも大きくなる。

よって， $x=-2$ のとき最小値 -5 ，最大値はない。

(2) $y=-(x-3)^2+7$ と変形され，グラフは上に凸になる(図 2)。

y の値は頂点で最大となり，また，いくらでも小さくなる。

よって， $x=3$ のとき最大値 7 ，最小値はない。

図 1

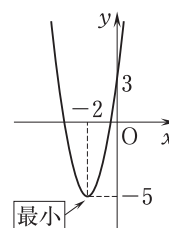
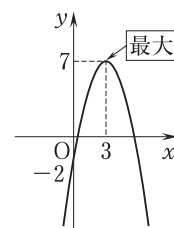


図 2

**2 区間における最大・最小** ⇒頂点，区間の両端に注目

次の 2 次関数の最大値，最小値とそれらを与える x の値を求めよ。

(1) $y=x^2-4x+5$ ($1 \leq x \leq 4$)

(2) $y=-2x^2+4x+8$ ($2 \leq x \leq 3$)

解 (1) $y=(x-2)^2+1$ と変形され，頂点は点 $(2, 1)$

また， $x=1$ のとき $y=2$ ， $x=4$ のとき $y=5$

グラフは右の図 1 の実線部分となる。

よって， $x=4$ のとき最大値 5 ， $x=2$ のとき最小値 1

(2) $y=-2(x-1)^2+10$ と変形され，頂点は点 $(1, 10)$

また， $x=2$ のとき $y=8$ ， $x=3$ のとき $y=2$

グラフは右の図 2 の実線部分となる。

よって， $x=2$ のとき最大値 8 ， $x=3$ のとき最小値 2

図 1

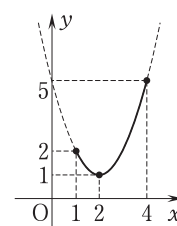
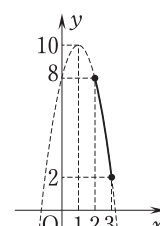


図 2

**3 係数の決定** ⇒軸と区間の位置関係は？

次の条件を満たすような定数 c の値を定めよ。

(1) 関数 $y=x^2-2x+c$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最小値が -3 である。

(2) 関数 $y=2x^2-12x+c$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値が -5 である。

解 (1) $y=(x-1)^2+c-1$ と変形され， $-2 \leq x \leq 2$ のとき，

$x=1$ で最小値をとる(図 1)。

$x=1$ のとき， $y=c-1$ であるから， $c-1=-3$

よって， $c=-2$

(2) $y=2(x-3)^2+c-18$ と変形され， $0 \leq x \leq 2$ のとき，

$x=2$ で最小値をとる(図 2)。

$x=2$ のとき， $y=2 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + c = c-16$

であるから， $c-16=-5$ よって， $c=11$

図 1

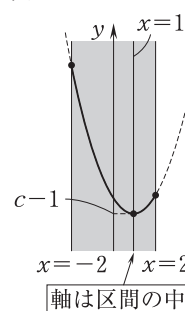
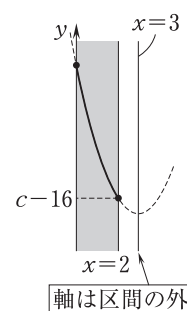


図 2



練習問題

1 2次関数の最大・最小 次の2次関数の最大値，最小値とそれらを与える x の値を求めよ。

(1) $y = x^2 + 2x - 4$

(2) $y = 2x^2 - 12x + 10$

(3) $y = -x^2 - 4x + 2$

(4) $y = -3x^2 + 6x + 4$

(5) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$

(6) $y = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 4$

(7) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 9$

(8) $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$

(9) $y = 3x^2 + 4x + 1$

(10) $y = -2x^2 + 2x + 1$

2 区間における最大・最小 次の2次関数の最大値，最小値とそれらを与える x の値を求めよ。

(1) $y = x^2 - 8x + 10$ ($1 \leq x \leq 3$)

(2) $y = 2x^2 - 4x - 4$ ($-2 \leq x \leq 3$)

(3) $y = -x^2 - 6x + 1$ ($-4 \leq x \leq 0$)

(4) $y = -2x^2 - 8x + 3$ ($-1 \leq x \leq 1$)

(5) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$ ($-2 \leq x \leq 2$)

(6) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$ ($0 \leq x \leq 4$)

(7) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 2$ ($1 \leq x \leq 4$)

(8) $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ ($-6 \leq x \leq -2$)

(9) $y = 3x^2 - 2x - 1$ ($0 \leq x \leq 1$)

(10) $y = -5x^2 - 4x + 1$ ($-1 \leq x \leq 0$)

3 係数の決定 次の条件を満たすような定数 c の値を定めよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -1 である。

(2) 関数 $y = 2x^2 + 12x + c$ ($-2 \leq x \leq 1$) の最小値が -9 である。

(3) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2 - x + c$ ($-2 \leq x \leq 5$) の最大値が 1 である。

(4) 関数 $y = -x^2 - 4x + c$ ($-5 \leq x \leq -1$) の最大値が 6 である。

(5) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + c$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最大値が 7 である。

(6) 関数 $y = -x^2 - x + c$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最小値が 2 である。