23 剰余の利用②

ここをチェック 1，2⇨ p48・3
3⇨ p48・1

1 余りを考える証明①　⇒*2乗した数の余りはもとの数の余りで場合分け*

n を整数とするとき，n^2 を 4 で割ったときの余りは，0 または 1 であることを証明せよ。

解　n は 4 で割ったときの余りによって，$4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$（k は整数）のいずれかの形で表される。

① $n=4k$ のとき　$n^2=16k^2=4\cdot4k^2$ ←**余りが 0**

② $n=4k+1$ のとき　$n^2=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1$ ←**余りが 1**

③ $n=4k+2$ のとき　$n^2=16k^2+16k+4=4(4k^2+4k+1)$ ←**余りが 0**

④ $n=4k+3$ のとき　$n^2=16k^2+24k+9=4(4k^2+6k+2)+1$ ←**余りが 1**

よって，n^2 を 4 で割ったときの余りは，0 または 1 である。

2 余りを考える証明②　⇒*割り切れないことの証明 ＝ 余りが 0 にならないことの証明*

n を整数とするとき，n^2-2n+5 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

解　n は 3 で割ったときの余りによって，$3k$，$3k+1$，$3k+2$（k は整数）のいずれかの形で表される。

① $n=3k$ のとき　$n^2-2n+5=9k^2-6k+5=3(3k^2-2k+1)+2$

② $n=3k+1$ のとき　$n^2-2n+5=9k^2+6k+1-6k-2+5=9k^2+4=3(3k^2+1)+1$

③ $n=3k+2$ のとき　$n^2-2n+5=9k^2+12k+4-6k-4+5=9k^2+6k+5=3(3k^2+2k+1)+2$

よって，n^2-2n+5 は 3 で割り切れない。←**n がどんな値でも余りは 1 か 2 となり割り切れない**

3 割り算の余りの性質　⇒*余りだけの計算をして計算を簡単に*

m を正の整数とし，a，b（a，b は整数）を m で割った余りをそれぞれ r，r' とすると，次のことが成り立つ。

① $a+b$ を m で割った余りは，$r+r'$ を m で割った余りに等しい。

② $a-b$ を m で割った余りは，$r-r'$ を m で割った余りに等しい。

③ ab を m で割った余りは，rr' を m で割った余りに等しい。

④ a^k（k は正の整数）を m で割った余りは，r^k を m で割った余りに等しい。

特に，④の性質は，次の例のような余りを求める計算に利用できる。

例　**〔36^{63} を 7 で割った余り〕**

36 を 7 で割った余りは 1 である。

よって，36^{63} を 7 で割った余りは，1^{63} を 7 で割った余りに等しい。

したがって，36^{63} を 7 で割った余りは **1** である。

〔2^{40} を 5 で割った余り〕

$2^4=16$ を 5 で割った余りは 1 である。←**2^{40} のままだと余りだけの計算に持ち込めないので，2^n のうち，5 で割って 1 余る数を考える**

よって，$2^{40}=(2^4)^{10}=16^{10}$ を 5 で割った余りは，1^{10} を 5 で割った余りに等しい。

したがって，2^{40} を 5 で割った余りは **1** である。

練習問題

1 **余りを考える証明①**　n を整数とするとき，次のことを証明せよ。

(1) n^2 を 3 で割ったときの余りは，0 または 1 である。

(2) n^2 を 5 で割ったときの余りは，0 または 1 または 4 である。

(3) n^2-n+1 を 6 で割ったときの余りは，1 または 3 である。

(4) n^2-3n+3 を 5 で割ったときの余りは，1 または 2 または 3 である。

2 **余りを考える証明②**　n を整数とするとき，次のことを証明せよ。

(1) n^2-3n+7 は 4 で割り切れない。

(2) n^2+6n+2 は 5 で割り切れない。

(3) n^2+4n を 3 で割ったとき，余りは 1 にならない。

(4) n^2+n-3 を 4 で割ったとき，余りは 2 にならない。

3 **割り算の余りの性質**　次のものを求めよ。

(1) 13^{31} を 6 で割ったときの余り

(2) 50^{50} を 7 で割ったときの余り

(3) 3^{72} を 13 で割ったときの余り

(4) 4^{66} を 9 で割ったときの余り

(5) 2^{128} を 7 で割ったときの余り

(6) 3^{102} を 16 で割ったときの余り

補講 合同式

ここをチェック　1，2 ⇨ p48・1，p50・3　3，4 ⇨ p50・3

1　合同式とその性質　⇒割った余りが同じなら合同

2 つの整数 a，b を自然数 m で割った余りが等しいとき，a と b は **m を法として合同である**といい，$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$ と表す。このような式を**合同式**といい，次のような性質がある。

〔合同式の性質〕 a，b，c，d が整数，m が自然数で，$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき，

［1］ $a+c \equiv b+d \pmod{m}$　　［2］ $a-c \equiv b-d \pmod{m}$

［3］ $ac \equiv bd \pmod{m}$　　［4］ k が自然数のとき，$a^k \equiv b^k \pmod{m}$

次の問いに答えよ。

(1) 次の合同式が成り立つかどうかを答えよ。

① $26 \equiv 5 \pmod{7}$　　② $25 \equiv 14 \pmod{3}$

(2) $3 \equiv \square \pmod{5}$ の□にあてはまる 2 桁の自然数を，小さい方から順に 2 つ求めよ。

解 (1) ① $26=7\cdot3+5$ より，$26 \equiv 5 \pmod{7}$ が**成り立つ**。 ← 7 で割った余りが等しいかどうかを考える

② $25=3\cdot8+1$ より，$25 \equiv 1 \pmod{3}$，また，$14=3\cdot4+2$ より，$14 \equiv 2 \pmod{3}$

よって，$25 \equiv 14 \pmod{3}$ は**成り立たない**。

$a \equiv b \pmod{m}$，$b \equiv c \pmod{m}$ ならば，$a \equiv c \pmod{m}$

(2) 求めるのは 5 で割った余りが 3 になる数である。

よって，**13，18** ← $5\cdot2+3=13$，$5\cdot3+3=18$

2　負の数の合同　⇒法とする数の負の倍数を考える

整数の合同は，負の数についても考えることができる。

例 5 を法として考えると，2 つの数 p，p' が m，m' を整数として，$p=5m+n$，$p'=5m'+n$ と表されるとき，$p \equiv p' \pmod{5}$ である。 ← m，m' は 0 や負の数も含む

例えば，$13=5\cdot2+3$，$-2=5\cdot(-1)+3$，$-7=5\cdot(-2)+3$ より，$13 \equiv -2 \pmod{5}$，$13 \equiv -7 \pmod{5}$

3　余りを求める①　⇒余りが出しにくいときは合同式の利用

13^{100} を 4 で割ったときの余りを求めよ。

解 $13 \equiv 1 \pmod{4}$ であるから，$13^{100} \equiv 1^{100} \pmod{4}$ ← $a \equiv b \pmod{m}$ ならば $a^k \equiv b^k \pmod{m}$（k は自然数）

$1^{100}=1$ であるから，13^{100} を 4 で割ったときの余りは **1** である。

4　余りを求める②　⇒合同式を利用して余りの計算に

整数 n が 7 で割ると 2 余る数であるとき，n^2-n+1 を 7 で割ったときの余りを求めよ。

解 $n \equiv 2 \pmod{7}$ であるから，$n^2-n+1 \equiv 2^2-2+1 \pmod{7}$

$2^2-2+1=3$ であるから，n^2-n+1 を 7 で割ったときの余りは **3** である。

合同式を使うと $n=7k+2$（k は整数）を代入しなくてよいので計算が簡単！

練習問題

1 **合同式とその性質**　次の問いに答えよ。

(1)　次の合同式が成り立つかどうかを答えよ。

①　$27\equiv 3 \pmod 4$　　②　$39\equiv 8 \pmod{11}$

③　$13\equiv 28 \pmod 5$　　④　$31\equiv 17 \pmod 3$

⑤　$53\equiv 75 \pmod{17}$　　⑥　$579\equiv 27 \pmod 8$

⑦　$72\equiv 0 \pmod 9$　　⑧　$32\equiv 128 \pmod 3$

(2)　次の□にあてはまる2桁の自然数を，小さい方から順に2つ求めよ。

①　$5\equiv\square \pmod 6$　　②　$4\equiv\square \pmod{11}$

③　$27\equiv\square \pmod 4$　　④　$48\equiv\square \pmod{13}$

2 **負の数の合同**　次の□にあてはまる負の整数を，大きい方から順に2つ求めよ。

(1)　$3\equiv\square \pmod 8$　　(2)　$7\equiv\square \pmod{11}$

(3)　$31\equiv\square \pmod 5$　　(4)　$42\equiv\square \pmod 4$

(5)　$27\equiv\square \pmod 3$　　(6)　$100\equiv\square \pmod{14}$

3 **余りを求める①**　次の問いに答えよ。

(1)　27^{360} を13で割ったときの余りを求めよ。

(2)　50^{124} を7で割ったときの余りを求めよ。

(3)　5^{328} を6で割ったときの余りを求めよ。

(4)　2^{100} を10で割ったときの余りを求めよ。

4 **余りを求める②**　次の問いに答えよ。

(1)　整数 n が5で割ると2余る数であるとき，$2n^2-5n+4$ を5で割ったときの余りを求めよ。

(2)　整数 n が8で割ると5余る数であるとき，n^2+3n-7 を8で割ったときの余りを求めよ。

(3)　整数 n が7で割ると4余る数であるとき，n^4+4n^2 を7で割ったときの余りを求めよ。

(4)　整数 n が11で割ると7余る数であるとき，$n^4-2n^3+6n^2$ を11で割ったときの余りを求めよ。