

introduction

第1回 文字式の基本

高校の数学は文字式で始まるんですね。たしか展開、
因数分解、方程式、関数でしたね。 x や y 、 a とか b
とか。基本的なルールは覚えています。 $5x-3x=2x$
や、 $5x \times 3x=15x^2$ 、でしょ。もう終わりにしましょう。



はいはい。じゃあ、次のことがわかったら、今日はおしまいね。【 $5x \times 3x$ や $5x-3x$ は単項式になるが、 $2x^2+3x$ は多項式である】。
はい、もうわかったのね。説明して。

何を言っているんですかぁ？ ボクの知らないことを並べて「説明しろ」ってひどいですよ。これからやる「基本」って、まだ習っていないことなんですね。



そう。中学数学からレベルアップする高校数学の最初の「基本」を教えるの。
最初は「項」。「項目」って知ってるでしょ。一つの情報のカタマリみたいなものね。

はい、何となくそんな感じですね。テーマは文字式ですから、たとえば「 $5x^2+5x+5$ 」が「項」ってことですか。…あ、でもこれじゃあ式と項が同じってことになっちゃいますね。教えてください。



知りたいのね。じゃあ教えてあげましょ。今の「 $5x^2+5x+5$ 」は3つの材料からできているのはわかるでしょ。「 $5x^2$ 」「 $5x$ 」「 5 」この3つのそれぞれが「項」。「 $5x^2+5x+5$ 」は「多項式」っていうの。

「多項式」？ また知らない言葉が…。それは何ですか…「項」が式の部品だってことはわかりましたが…待てよ、「項が多数集まった式」だから「多項式」ですか？「まんまやんけ」ってツッコミ入ります？



いいえ、あなたの言うとおりの。最初の内容が「単項式と多項式」。単項式は「項が一つ（単数）の式」、多項式は「項が複数集まった式」のこと。
いいスタート。続きが楽しみねっ！

全然楽しみではありません…。あれ…？「項が一つ」って、「 5 」は単項式、ってことでしょう。「 5 」が式なんですか？わからなくなりました。



ね。わかると楽しくて、次の疑問が生まれ、
解決する楽しみが…。じゃ、続けましょ♪



● GUIDANCE

1 単項式と多項式

「項」と単項式

まず、「項」という言葉を理解してください。数や文字で作られた最も小さな数式の単位です。
 $1, 128, 3856, -21, 12.1336, -0.0062, 351$ 分の $1\dots$ このような「数」の一つ一つが「項」です。
 ただし、注意してください。最初に「数式」とありましたね。文字を含む「項」もあります。
 $x, 2a, 17x$ 分の $-5x^2y, -23y$ などのような文字を含むものも「項」です。

単項式とは、「+（足し算のプラス）」や「-（引き算のマイナス）」を含まないひとかたまりの「項」です。
 なお、「-（マイナス）」には厳密に分けると2種類があります。上の計算記号としてのマイナスに対し、
 $-5x^2y$ の先頭についているのは「負の数」を表すための「符号（ふごう）」です。何となくでもよいので区別しておいてください。

それから、数値が一つしかないのに「式」ということに違和感をおぼえた人もいるでしょう。「式」というのはただ1つの項でも「数式」とよぶことを知っておいてください。では、まとめます。

■ 単項式 1つの項でできた数式

次に「多項式」です。これは何となく想像できますね。多くの項からできた数式です。正確に言うと、「単項式の和で作られた数式」です。

$3x^2-4x+2$ のようなものです。何回も見ただけありますね。では、まとめます。

■ 多項式 複数の単項式の和でできた数式

単項式の係数と次数

単項式にもどります。

係数 単項式では、いわゆる「数」の部分に係数と呼びます。係数とは「かけた数」くらいに理解してください。単項式 $2ab$ の係数は、 ab の前にある「2」です。

次数 単項式において、「かけた文字」の個数をその単項式の次数といいます。「 $2ab$ 」の次数はいくつでしょうか？ a が1個と b が1個、合計2個の文字がかけられているので、「次数2」となります。「 $1147x$ 」の次数は1です。「 $1147x^3$ 」はどうですか？ x が3回かけられているので、次数は3です。これを3次式とよびます。「 $1147x^3y^4$ 」は？ この単項式の次数は7です（7次式）。 x が3回、 y が4回かけられているからです。 $36a$ の次数は1です（1次式）。3のような、数だけの単項式の次数は0と考えます（0次式）。文字が何も無いからです。

また、数だけの項（ x などの文字を含まない）を「定数項」と呼びます。これも思い出してください。ここまではほぼ、中学校の復習。ここからが高校で学ぶ内容です。
 注意して読み進めてください。

うーん…疑問がたくさん…。「式」というのは、「 $5+3$ 」みたいにプラスやマイナスがあって、計算をするためのものだと思っていました。でも、これからはたとえば「53」も式とするってことですね。



そう。「53」を正確に書くと「 $5 \times 10 + 1 \times 3$ 」を「 $50+3$ 」と短くして、もっと省略した結果なの。だから、数式といえるのね。「 $3 \times x$ 」を「 $3x$ 」とするでしょ。だから、もともとはこれも数式なの。

係数と次数：特定の文字に着目

単項式が2種類以上の文字を含むとき、「ある文字に着目して」係数や次数を考えることがあります。「はあ？」と思った人、少しガマンして続けてください。
「ある文字に着目して」とは、ある特定の文字だけを「文字」として取り扱い、それ以外の文字は一度「数」として扱う（文字とは見ない）ということです。「数」として扱う項を定数項と言いましたね。

例： $-5x^2y$ の係数と次数を答えなさい。

この単項式の係数は -5 です。次数は 3 ですね（ x が 2 つ、 y が 1 つで計 3 ）。
ここまでは理解できましたか？

例： $-5x^2y$ の係数と次数を x に着目して答えなさい。

同じ単項式「 $-5x^2y$ 」を、 x に着目して考えるわけです。
 x に着目したということは、それ以外の『 y 』は「数」として扱います。 -5 と y はどちらも「数」なのです。「 $-5x^2y$ 」で、「 $-5y$ 」をまとめて、「 $-5yx^2$ 」のように見ます。順番を書き換えるとよいでしょう。
係数 数として扱う $-5y$ です。
次数 「文字」として扱われている x をかけた数なので、 2 です。

もう1問、確認のために試します。

例： $-25a^3b^7$ の係数と次数を a に着目して答えなさい。

a に着目して考えます。この場合、 b は数値なので、前に出して、「 $-25b^7a^3$ 」のように見ます。
係数 数として扱う $-25b^7$ があるので、そのまま $-25b^7$ です。
次数 「文字」として扱われている a が何回かけられたか、なので、 3 です。

例： $-25a^3b^7c$ の係数と次数を b に着目して答えなさい。

b に着目して考えます。この場合、 a, c は数値なので、前に出して、「 $-25a^3cb^7$ 」のように見ます。
係数 数として扱う $-25a^3c$ です。
次数 「文字」として扱われている b のかけられている個数なので、 7 です。

ここまでできたら安心。やっと多項式です。お待たせしました。

多項式

要するにいくつも項がある式です。もう一度、単項式・多項式とは何か、を確認します。

誰も待ってません。でも、質問します。この次数って、「2次方程式」や「2次関数」の「次」と同じですか？だとすると、 $25x^3+5y^4+5=0$ は7次方程式ですか？



たしかに、「7次方程式」に見えるね。でも、方程式はそうは言わないの。この方程式は「 x 」についての3次方程式」または「 y 」についての4次方程式」とするの。じきにわかるので待っててね。



待ちたくありませんね…。でも、 x だけを見たり、 y だけを見たりすると、そうなる気がしますね。え？いい線いってます？じゃあ待ちますよ。はい。



■単項式 1つの項でできた数式

■多項式 複数の単項式の和でできた数式

$3x^2+(-4x)+2$ のように、単項式の和として表される式を多項式といいます。
そして、その一つ一つの単項式を、この**多項式の項**といいます。

例： $3x^2+(-4x)+2$ の項をすべて答えなさい。

$3x^2, +(-4x), +2$ の3つですね。なお、項を分けると、もともとは足し算の記号であった「+」は不要になります。そこで、項は次のように書かれます。

$3x^2, -4x, 2$

この多項式は、3つの単項式の和でできていることがわかりました。

$3x^2+(-4x)+2$ は、ふつうはカッコ（ ）を外して、 $3x^2-4x+2$ と書きます。

同類項・同類項をまとめる

$5x^2+4x+x^2-3$ における $5x^2$ と x^2 のように、多項式の項の中で、文字の部分が同じである項を同類項といいます。同類項は、係数の和を計算して、1つの項にまとめることができます。

$5x^2+4x+x^2-3$ は、同類項 $5x^2$ と x^2 を合計して $6x^2+4x-3$ と表すことになります。

$$5x^2+4x+x^2-3 = 6x^2+4x-3$$

このあたりの計算は中学校でも学びましたね。

多項式の次数

同類項をまとめた多項式で、次数のもっとも高い項の次数を、その多項式の次数といいます。もう一度太字で書きます。

■ある多項式の次数：同類項をまとめた多項式で、**次数のもっとも高い項の次数**

例： $6x^2+4x-3$ の次数を答えなさい。

$6x^2+4x-3$ であれば、「 $6x^2$ 」の次数2が最も高いので、次数は2です。ではもう1つ。

例： $3x^3+4xy^2z+2$ の次数を答えなさい。

$3x^3$ は次数3、 $4xy^2z$ は次数4なので、次数は4です。

また、次数が n の式を n 次式といいます。 $6x^2+4x-3$ は、2次式ですね。もう一度強調して書きます。

■次数が n の式： n 次式

「多項式」って「和でできた式」っていいですけど、たとえば、 $6x^2+4x-3$ の場合、「マイナス3」ですから、これは和じゃなくて差なんじゃないですか？ それでも多項式なんですか？



鋭いツッコミね。思い出して。「1-3」は正確に書くと「 $1+(-3)$ 」だったでしょ。「引き算」は「負の数を足す計算」なの。だから、全部「和でできた式」。何か、会話のレベルが上がってるみたい。

次に、多項式で項を並べる順番を説明します。

例えば先ほどの「 $6x^2+4x-3$ 」について、「 $4x+6x^2-3$ 」や「 $-3+4x+6x^2$ 」という順番でもいいのでは？と思うかもしれませんが。たしかに結果は同じです。しかし、国際的なルールがあるので、それに従ってください。場合によっては減点の対象になることもあります。

高校数学では、とくに断りのない限り、文字が1種類の場合「 $6x^2+4x-3$ 」のように、文字の次数が大きい項から順に並べます。これを降べきの順に並べる、といいます。ここ、重要です。「降べき」とは高い（大きい）次数から低い（小さい）次数に降る、という意味です（反対は「昇べき」）。

■降べきの順：文字の次数の大きな順

例： $-4x^2+2+3x^3$ の各項を降べきの順に並べ替えなさい。

$3x^3-4x^2+2$ です。

次に、複数の文字がある場合です。1つの文字に着目して降べきの順に並べます。

例： $-5x^2y+2xy^2z+yz-4xz$ の各項を x に着目して降べきの順に並べ替えなさい。

2次の項： $-5x^2y$ 1次の項： $2xy^2z$ と $-4xz$ 0次の項（ x が無い）： yz と分類します。

$-5x^2y+2xy^2z+yz-4xz$
 $=-5x^2y+2xy^2z-4xz+yz$ となります。

項が2つある場合、今回の $2xy^2z$ と $-4xz$ は、 x でまとめておきます。

$-5x^2y+2xy^2z-4xz+yz$
 $=-5x^2y+x(2y^2z-4z)+yz$

例： $-5x^2y+2xy^2z+yz-4xz$ の各項を y に着目して降べきの順に並べ替えなさい。

2次の項： $2xy^2z$ 1次の項： $-5x^2y$ と yz 0次の項（ y が無い）： $-4xz$ と分類します。

$-5x^2y+2xy^2z+yz-4xz$
 $=2xy^2z-5x^2y+yz-4xz$ となります。

今回は、 $-5x^2y$ と yz は、 y でまとめておきます。

$2xy^2z-5x^2y+yz-4xz$
 $=2xy^2z+y(-5x^2+z)-4xz$ これで完了です。

「降べきの順に並べる」は、この後で複雑な因数分解を行うときに役立ちます。お楽しみに。



おや、またまたいい質問ね。

答えましょ。「場面によってよりよい方を選んで使う」。この「よい方を選ぶ」が、複雑な因数分解を解決するときの力になるの。ね、楽しみでしょ！

全く楽しみじゃありません。でも、質問です。

結局、上の多項式の場合、 x と y のどちらに着目して降べきの順に並べるのが正しいんですか？



気が重くなりました…。

最後にまとめです。困ったら、ここにもどってください。

◆単項式：1つの項でできた数式

◆多項式：複数の単項式の和でできた数式

◆単項式の係数：「数」の部分

◆単項式の次数：文字をかけた個数

◆多項式の次数：最も次数の高い項の次数・次数 n の多項式は n 次式

◆降べきの順に並べる：多項式の項を、ある文字に着目し、その次数の高い順に並べること

1 次数と係数

① 単項式 $5ab^2x^4$ について

(1) x に着目したときの、次数および係数を答えなさい。

「 x に着目したときの次数」とは、かけられている x の個数である。 x は 4 回かけられているので、次数は 4 である。

「 x に着目したときの係数」とは、 x 以外の数字・文字の部分である。よって、係数は $5ab^2$ である。

(2) a と b に着目したときの、次数および係数を答えなさい。

「 a と b に着目したときの次数」とは、かけられている a および b の個数である。 a は 1 回、 b は 2 回かけられているので、次数は 3 である。

「 a と b に着目したときの係数」とは、 a 、 b 以外の数字・文字の部分である。よって、係数は $5x^4$ である。

② 多項式 $4x^2 - 5x + 6$ は何次式か

項のうち、次数が最も高い項の次数は「 $4x^2$ 」の 2 なので、2 次式である。

◇ トレーニング ◇

① 単項式 $3a^2bc^4$ について、次の問いに答えなさい。

(1) a に着目したときの、次数および係数を答えなさい。

(2) b と c に着目したときの、次数および係数を答えなさい。

② 多項式 $1 + 6x - 8x^2 - 2x^4$ は、何次式か答えなさい。

解 ① (1) 次数：2 次 係数： $3bc^4$ (2) 次数：5 次 係数： $3a^2$ ② 4 次式

2 多項式の種類項をまとめる

- ① $2x^2 - 5xy - 2 - 3x^2 + 7xy - 4$ の種類項をまとめ、 x の降べきの順に並べなさい

まず、文字の部分と同じである種類項を探す。 $2x^2$ と $-3x^2$ 、 $-5xy$ と $+7xy$ 、 -2 と -4 がそれぞれ種類項であるので、係数をそれぞれ計算する。

$$2x^2 - 3x^2 = (2 - 3)x^2 = -x^2$$

$$-5xy + 7xy = (-5y + 7y)x = 2yx$$

$$-2 - 4 = -6$$

次に、この3つをまとめる。 $2x^2 - 5xy - 2 - 3x^2 + 7xy - 4 = -x^2 + 2xy - 6$

この多項式はすでに x の降べきの順になっているので、これが答え。

- ② $x^2 + xy + 2 + x - 2y + 2x^2 - 3$ の種類項をまとめ、 x の降べきの順に並べなさい。

まず、文字の部分と同じである種類項を探す。 x^2 と $+2x^2$ 、 $+2$ と -3 がそれぞれ種類項であるので、係数をそれぞれ計算する。

$$x^2 + 2x^2 = (1 + 2)x^2 = 3x^2$$

$$+2 - 3 = -1$$

次に、この2つをまとめる。 $x^2 + xy + 2 + x - 2y + 2x^2 - 3 = 3x^2 + xy + x - 2y - 1$

x の降べきの順に並べるので、 xy と x をまとめて答えを書く。

$$3x^2 + xy + x - 2y - 1 = 3x^2 + x(y + 1) - 2y - 1$$

◇トレーニング◇

多項式 $x^2 - 5xy + 3 - 3x^2 + 2xy - 1$ の種類項をまとめ、 x の降べきの順に並べなさい。

解 $-2x^2 - 3xy + 2$



1 次数と係数

次の式で [] 内の文字に着目したとき，その次数をいいなさい。また，(1)～(6)については係数を，(7)，(8)については定数項を答えなさい。

(1) $6x^2$ [x]

(2) x [x]

(3) $-x^2y^2$ [x]

(4) $-3abc$ [b と c]

(5) $2abx^3$ [x]

(6) $-0.3ax^2y$ [x と y]

(7) $3x^3-2x^2y^4+4y^5$ [x]

(8) $3x^3-2x^2y^4+4y^5$ [y]



2 多項式の同類項をまとめる

次の多項式の同類項をまとめ、 x の降べきの順に並べなさい。

(1) $2x^2 + x - 3 - 4x^2 - 2x + 6$

(2) $3x^2 - 5xy - 4y^2 - 5x^2 - 2xy + 8y^2$

(3) $2x^3 - 2xy^2 + y + 4x^2y - 5xy + 2$

(4) $5xy + 2x^2 - 2 + 3y^2 - 3x - 5y$

(5) $2x - 4x^2 + 3 - 6x + 4 + x^3 + x^2$

(6) $2x^2 - 1 + x - 3x^2 - x + 2 - x^4$



● GUIDANCE

2 単項式と多項式の基本的な計算

この単元は、中学校の復習です。確認してください。

多項式の和の求め方 カッコを無視して同類項をまとめ、計算を行う

多項式の差の求め方 符号を反対にして同類項をまとめ、計算を行う

例： $A = -3x^2 + 2x + 2$ ， $B = 4x^2 - 5x + 6$ について、和 $A+B$ と差 $A-B$ を求めなさい。

和 $A+B = (-3x^2 + 2x + 2) + (4x^2 - 5x + 6)$

和を求める場合、カッコは無視します。

$$\begin{aligned} & (-3x^2 + 2x + 2) + (4x^2 - 5x + 6) \\ &= -3x^2 + 2x + 2 + 4x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

次に、同類項を計算します。

$$\begin{aligned} & -3x^2 + 2x + 2 + 4x^2 - 5x + 6 \\ &= (-3+4)x^2 + (2-5)x + (2+6) \\ &= x^2 - 3x + 8 \end{aligned}$$

これで終了です。

差 $A-B = (-3x^2 + 2x + 2) - (4x^2 - 5x + 6)$

差の場合、後の式の符号を反対にしてカッコを外してから計算します。

$$\begin{aligned} & (-3x^2 + 2x + 2) - (4x^2 - 5x + 6) \\ &= -3x^2 + 2x + 2 - 4x^2 + 5x - 6 \end{aligned}$$

次に、同類項を計算します。

$$\begin{aligned} & -3x^2 + 2x + 2 - 4x^2 + 5x - 6 \\ &= (-3-4)x^2 + (2+5)x + (2-6) \\ &= -7x^2 + 7x - 4 \end{aligned}$$

これで終了です。

指定のない限り、計算結果は与えられた文字（今回は x ）の降べきの順に整理することが原則です。

単項式の乗法では、指数法則を用います。（ m, n は正の整数とする。）

$$1 \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2 \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$3 \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

例えば、次のように用います。

$$2x^2 \times 3x^3 = (2 \times 3)x^{2+3} = 6x^5$$

$$4p^5 \div 2p^2 = (4 \div 2)p^{5-2} = 2p^3$$

$$(2a^3b^2)^3 = 2^3(a^3)^3(b^2)^3 = 8a^{3 \times 3}b^{2 \times 3} = 8a^9b^6$$

思い出しましたか。

はい、バッチリです！



では、例題に進みます！



3 多項式の和・差

① $(3x^2+2x+2)+(2-x+5x^2)$

$$(3x^2+2x+2)+(2-x+5x^2) = 3x^2+2x+2+2-x+5x^2$$

解

$$(3x^2+2x+2)+(2-x+5x^2)$$

$$=3x^2+2x+2+2-x+5x^2 \quad \leftarrow \text{かっこをはずす}$$

$$=(3+5)x^2+(2-1)x+(2+2) \quad \leftarrow \text{同類項計算}$$

$$=8x^2+x+4$$

② $(2x^2+4x-1)-(3x^2+4x+1)$

$$(2x^2+4x-1)-(3x^2+4x+1) = 2x^2+4x-1-3x^2-4x-1$$

解

$$(2x^2+4x-1)-(3x^2+4x+1)$$

$$=2x^2+4x-1-3x^2-4x-1 \quad \leftarrow \text{かっこをはずす}$$

$$=(2-3)x^2+(4-4)x+(-1-1) \quad \leftarrow \text{同類項計算}$$

$$=-x^2+0x-2$$

$$=-x^2-2$$



4 指数法則

① $(-9a^2b) \div 3ab$

解

指数法則 2 を利用

$$(-9a^2b) \div 3ab = (-9) \div 3 a^{2-1} b^{1-1} = -3a$$

② $(-2x^2y)^2 \times (-xy^2)^3$

解

$$(-2x^2y)^2 \times (-xy^2)^3$$

指数法則 4 を利用

$$(-2x^2y)^2 \times (-xy^2)^3 = (-2)^2 (x^2)^2 (y)^2 \times (-1)^3 (x)^3 (y^2)^3$$

指数法則 3 を利用

$$(-2)^2 (x^2)^2 (y)^2 \times (-1)^3 (x)^3 (y^2)^3 = 4x^4y^2 \times (-x^3y^6)$$

指数法則 1 を利用

$$4x^4y^2 \times (-x^3y^6) = -4x^{4+3}y^{2+6} = -4x^7y^8$$

◇トレーニング◇

次の計算をなさい。

① $(2+x^2+4x^3+3x)-(5x-7+x^2-2x^3)$

② $(3x^2-x+2)+(2x^2-3x-4)$

③ $2x^2 \times (-3y^2)^3$

解 ① $6x^3-2x+9$ ② $5x^2-4x-2$ ③ $-54x^2y^6$



3 多項式の和・差

(1) $(3x^2+4x+2)+(x^2-4x-3)$

(2) $(-4x^2+2x+3)+(-x^2-4x+2)$

(3) $(2x^3-6x^2-5x+2)+(-3x^3+x^2-2x-7)$

(4) $(-2x^2-xy+3y^2)+(3x^2-4xy+2y^2)$

(5) $(3x^2-x+2)-(-x^2-4x+4)$

(6) $(4a^2-2a+3)-(3a^2+4a+4)$

(7) $(-4x^3+2x^2-x+5)-(2x^3-7x^2+3x+7)$

(8) $(2a^2+7ab-3b^2)-(a^2-4ab-2b^2)$

4 指数法則

(1) $-2a^3 \times 3a^2$

(2) $(x^3)^2$

(3) $-4x^2y^5 \div (-2x^2y^3)$

(4) $(-3x^4y^2z)^3$

(5) $(-6x^2) \times (-3x^3)$

(6) $(-2x^2)^2$

(7) $-6ab^3 \div 3ab$

(8) $(-2a^2b)^4$

introduction

第2回 式の展開

「展開」って何をするんですか？ 中学で公式を習った記憶はあるんですが、おぼえていません。



はいはい。「展開」はね、積の形でまとめられた多項式を実際に掛け算して、もう掛け算できないってところまで変えることなの。

はあああ…。全く理解できません…。
限界みたいです。もう帰っていいですか？



ごめんごめん。
じゃあ、いいこと教えてあげる。
「展開」は、掛け算と足し算引き算をていねいにすれば、必ず答えられるの。

ほんとうですか！
じゃあ、心配いらないってことですね。
必ず答えが出せるんですね。



たとえば、 $3(x+1)$ があるでしょ。
これを $3x+3$ とするの。
掛け算して、カッコを外すだけ、ね。

それだけでですか。
え〜と、たとえば $4(x+2)$ だったら、 $4x+8$ ですね。
よ〜し、できた。
これでテストもバッチリできますね！



う〜ん…たしかにそうなんだけど…。
実際はもっと複雑だったり長かったりするの…。
 $(88x^3+226x^2-9x)(7y^2+226y-79)$ とか…。



第2回 式の展開 1

● GUIDANCE

1 式を「展開する」とは？

- ① 積の形で表示された多項式を「掛け算」を行って多項式にすること
具体的には規則どおりに掛け算などをするだけ。もともとは「 $3(2+3)=6+9=15$ 」と同じことです。

- ② 展開の計算方法

分配法則を用いて、次の式のように行う：これさえできれば「展開」は確実に正解できます！

$$\begin{aligned} & 3(4x+7) \\ & \quad \text{順番に掛け算をするだけ。} \quad 3(4x+7) \\ & = 3 \times 4x + 3 \times 7 \\ & = 12x + 21 \end{aligned}$$

どんな問題も、これが複雑になるだけです。「次数が大きくなる・項が増える・文字が増える」などです。ただし、手順とルールを正しく守り、計算ミスを防ぐことが大切（自信がなければ第1回を見直す）。「やり方が分かる」だけでは、複雑な問題を時間内に解き終えるのは難しいので、練習量がものをいいます。

2 展開の方法を分類して理解する（より便利な方法）

- ① 分配法則を用いて、規則どおりに計算するもの
分配法則のとおりには掛け算などを進める・上の例と同じ方法を用いる

- ② 乗法公式を用いるもの

乗法公式に当てはめられるものは、公式を使ってスピーディに解決
当てはめられそうかどうかの判断を素早く行うことが重要

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\ (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ (x-a)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\ (x+a)(x-a) &= x^2 - a^2 \\ (ax+b)(cx+d) &= acx^2 + (ad+bc)x + bd \end{aligned}$$

- ③ 置き換えを用いるもの

複雑な多項式でも「共通の文字や数値」を見つけ、置き換えを行うことでシンプルに

$(a+b)(a+b+3)$ の場合、 $a+b$ を「 A 」と置き換える

$A(A+3)$ となるので、 A^2+3A となる。

この A を $(a+b)$ に戻す

$$= (a+b)^2 + 3(a+b)$$

前の項は乗法公式を使い

後の項はそのまま展開する

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$$

この「置き換え」って、何の役に立つんですか？ 普通に計算してもあんまり変わらない気がするんですが...



こんなかんたんな問題ならそうね。どちらでもいい。でも、実際にはもっと複雑で長い式のときに、すごく役に立つの。

では、例題に進みます！



式の展開 例題 a



1 最もシンプルな展開 ◇指数は2乗まで・項は2つまで

① $3x(4x+7)$

順番に掛け算をするだけ。 $3x(4x+7)$

$$= 3x \times 4x + 3x \times 7$$

$$= 12x^2 + 21x$$

これ以上、項をまとめることはできないので、これで終了。

◇トレーニング◇

次の（ ）にあてはまる式を書きなさい。ただし、ウは、 a についての降べきの順に並べて答えなさい。

$$\begin{aligned} & 2a(3a+9) \\ = & 2a \times (\text{ア} \quad \quad) + (\text{イ} \quad \quad) \times 9 \\ = & (\text{ウ} \quad \quad) \end{aligned}$$

解 ア $3a$ イ $2a$ ウ $6a^2+18a$



2 項が多い展開 ◇指数は3乗まで、項は2つから3つ

① $3x(4x^2+3x+7)$

これも、順番に掛け算をするだけ。 $3x(4x^2+3x+7)$

$$3x \times 4x^2 + 3x \times 3x + 3x \times 7$$

$$= 12x^3 + 9x^2 + 21x$$

これ以上、項をまとめることはできないので、これで終了。

② $(2x^2+3)(3x+7)$

これも、順番に掛け算をするだけ。ただし、4回。 $(2x^2+3)(3x+7)$

$$2x^2 \times 3x + 2x^2 \times 7 + 3 \times 3x + 3 \times 7$$

$$= 6x^3 + 14x^2 + 9x + 21$$

これ以上、項をまとめることはできないので、これで終了。

一つ一つの計算はシンプル。

しかし、書き写す際にミスしがちなので注意！

◇トレーニング◇

(1) $2x(2x^3-3x+1)$

(2) $(2x+3)(4x-1)$

解 (1) $4x^4-6x^2+2x$ (2) $8x^2+10x-3$



基本はこれだけっ。
あとは、指数の値や項の数が増えてややこしくなるだけ。
ミスしなければ大丈夫！

3 指数が大きい展開 ◇指数は3 乗以上, 項は2 つ以上

① $3x^2(4x^2+7)$

順番に掛け算をするだけ。 $3x^2(4x^2+7)$

$$3x^2 \times 4x^2 + 3x^2 \times 7$$

$$= 12x^4 + 21x^2$$

これ以上, 項をまとめることはできないので, これで終了。

② $(2x^2-3)(x^2+2)$

これも, 順番に掛け算をするだけ。ただし, 4 回。 $(2x^2-3)(x^2+2)$

$$2x^2 \times x^2 + 2x^2 \times 2 - 3 \times x^2 - 3 \times 2$$

$$= 2x^4 + 4x^2 - 3x^2 - 6$$

$4x^2$ と $-3x^2$ はまとめることができる。

$$= 2x^4 + x^2 - 6$$

これで終了。

一つ一つの計算はシンプル。

しかし, 書き写す際にミスをしやすいので注意!

◇トレーニング◇

(1) $x^3(-x^3+3x+4)$

(2) $(2x^2+3x)(x^3+3)$

解 (1) $-x^6+3x^4+4x^3$ (2) $2x^5+3x^4+6x^2+9x$



式の展開 練習問題 a



1 最もシンプルな展開 ◇指数は2乗まで・項は2つまで ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $5a(2a-3)$

(2) $-2x(4x+1)$

(3) $(3a-5) \times 4a$

(4) $2a(a-1)$

2 項が多い展開 ◇指数は3乗まで、項は2つか3つ ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $3x(x^2-x+5)$

(2) $5x(3x^2+2x-1)$

(3) $(2x-7)(2x^2+3)$

(4) $(6a^2+5)(4a-1)$

(5) $-7x(3x^2-x-4)$

(6) $(3x+2)(4x^2-7)$



3 指数が大きい展開 ◇指数は3乗以上, 項は2つ以上 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $3x^2(2x^3-5x)$

(2) $(x+2)(x^2-x-3)$

(3) $(3-2a)(4a^2+6a+9)$

(4) $(3x+x^3-1)(2x^2-x-6)$

(5) $(3t+2t^3-4)(t^2-5-3t)$

(6) $(x^3+x-3)(x^2-2x+2)$

(7) $(x^2-3x+6)(2x^2-6x-5)$

(8) $(5-x+x^2)(-2x+x^2-1)$

(9) $(x^2-3x+2)(3-2x)$

(10) $2a^4(2a^3-5a+4)$

(11) $(3a^3-1)(5a^3+3)$

(12) $(4x^3-x-5)(2x^2-9)$

4 乗法公式 ◇指数は2乗まで、項は2つ

① $(x+2)(2x+3)$

乗法公式 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を利用して展開する。

今回は、 $a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, c \rightarrow 2, d \rightarrow 3$ だから

$$\begin{aligned} & (x+2)(2x+3) \\ &= 1 \times 2x^2 + (1 \times 3 + 2 \times 2)x + 2 \times 3 \\ &= 2x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

これ以上、項をまとめることはできないので、これで終了。

② $(x+2)^2$

乗法公式 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ を利用して展開する。

今回は、 $a \rightarrow 2$ だから

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 \\ &= x^2 + 2 \times 2x + 2^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

これ以上、項をまとめることはできないので、これで終了。

③ $(2x+3)(2x-3)$

乗法公式 $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ を利用して展開する。

今回は、 $x \rightarrow 2x, a \rightarrow 3$ だから

$$\begin{aligned} & (2x+3)(2x-3) \\ &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= 4x^2 - 9 \end{aligned}$$

これ以上、項をまとめることはできないので、これで終了。

◇トレーニング◇

(1) $(2x+3)(x-4)$

(2) $(2x+3)^2$

(3) $(3x-1)(3x+1)$

解 (1) $2x^2-5x-12$ (2) $4x^2+12x+9$ (3) $9x^2-1$



4 乗法公式 ◇指数は2乗まで，項は2つ ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(x+3)^2$

(2) $(x+3)(x-3)$

(3) $(p-7)(p+6)$

(4) $(6x-7)(3x+2)$

(5) $(t+3)(t-5)$

(6) $(2x-1)^2$

(7) $(3x+4)(2x-7)$

(8) $(x+3)(x-4)$

(9) $(2x+3)(4x+5)$

(10) $(a+2)^2$

(11) $(2x-3)(3x-2)$

(12) $(3x+4)^2$

(13) $(6c-1)(6c+1)$

(14) $(2x+1)^2+(2x-1)^2$

5 置き換え展開 ◇指数は3乗以上, 項は3つ

① $(x^2+x+2)(x^2+x-3)$

与えられた式は, 左の多項式にも右の多項式にも「 x^2+x 」がある。

→これを A に置き換えて, 乗法公式を用いて展開する。

→ A での展開が終わったら, A を元の「 x^2+x 」にもどして, 最後まで展開する。

$$\begin{aligned} & (A+2)(A-3) \quad \leftarrow \text{「}x^2+x\text{」を「}A\text{」に} \\ & =A^2-A-6 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \text{ を利用して展開} \\ & =(x^2+x)^2-(x^2+x)-6 \quad \leftarrow A \text{ を元の「}x^2+x\text{」に戻す} \\ & =(x^2)^2+2 \times x^2 \times x+x^2-x^2-x-6 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \text{ を利用} \\ & =x^4+2x^3+x^2-x^2-x-6 \\ & =x^4+2x^3-x-6 \quad \leftarrow \text{同類項をまとめる} \end{aligned}$$

② $(x^2+x+1)(x^2+2x+1)$

与えられた式は, 左の多項式にも右の多項式にも「 x^2+1 」がある。

→これを A に置き換えて, 乗法公式を用いて展開する。

→ A での展開が終わったら, A を元の「 x^2+1 」にもどして, 最後まで展開する。

$$\begin{aligned} & (A+x)(A+2x) \quad \leftarrow \text{「}x^2+1\text{」を「}A\text{」に} \\ & =A^2+3Ax+2x^2 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \text{ を利用} \\ & =(x^2+1)^2+3(x^2+1)x+2x^2 \quad \leftarrow A \text{ を元の「}x^2+1\text{」に戻す} \\ & =(x^2)^2+2 \times x^2 \times 1+1+3x^3+3x+2x^2 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \text{ を利用} \\ & =x^4+2x^2+1+3x^3+3x+2x^2 \\ & =x^4+3x^3+4x^2+3x+1 \quad \leftarrow \text{同類項をまとめて, } x \text{ についての降べきの順に並べる} \end{aligned}$$

◇トレーニング◇

$(x^2-3x+1)(x^2-3x-1)$

解 $x^4-6x^3+9x^2-1$



5 置き換え展開 ◇指数は3乗以上, 項は3つ ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(a^2+3a-2)(a^2+3a+3)$

(2) $(x^2+3x+2)(x^2-3x+2)$

(3) $(x^2+x+2)(x^2-x-2)$

(4) $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$

(5) $(x^2+x-2)(x^2+x+3)$

(6) $(2a^2+a+2)(2a^2-a+2)$



6 項と文字が多い展開 ◇文字 2 文字以上, 指数 1 乗, 項 2 つ以上

$$(x+2)(y+3)$$

順番にかけ算するだけ

$$(x+2)(y+3)$$

$$= xy+3x+2y+6$$

これ以上, 項をまとめることはできないので, これで終了。

7 指数が大きい展開 ◇文字 2 文字以上, 項 2 つ以上, 指数 2 乗以上

$$x^2y(2x^3y+3xy^2)$$

順番にかけ算するだけ

$$x^2y(2x^3y+3xy^2)$$

$$= x^2y \times 2x^3y + x^2y \times 3xy^2$$

$$= 2x^5y^2 + 3x^3y^3$$

これ以上, 項をまとめることはできないので, これで終了。

◇トレーニング◇

(1) $(a-2b)(3x+y)$

(2) $xy^3(x^2+xy^2-y)$

解 (1) $3ax+ay-6bx-2by$ (2) $x^3y^3+x^2y^5-xy^4$



6 項と文字が多い展開 ◇文字 2 文字以上, 指数 1 乗, 項 2 つ以上 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(3a-2b)(2x+3y)$

(2) $(x-y)(x+y-1)$

(3) $(2a-b+3c)(2a+b-c)$

(4) $(x-y-1)(x+2y-1)$

7 指数が大きい展開 ◇文字 2 文字以上, 項 2 つ以上, 指数 2 乗以上 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(a^2b)^2(a+4b-2c)$

(2) $-2xy(x^2y-xy-4)$

(3) $-3x^2y(2x-3y)$

(4) $(-2a^2b)^2(2a-3b)$

(5) $(3x-y)(x^2+xy+y^2)$

(6) $(x^2+5y^2)(-x^2+3xy)$

8 乗法公式 ◇文字は2文字, 指数は2乗まで, 項は2つ

① $(5x-2y)^2$

乗法公式 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ を利用して展開する。

今回は, $x=5x$, $a=2y$ だから

$$\begin{aligned} & (5x-2y)^2 \\ &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2y + (2y)^2 \\ &= 25x^2 - 20xy + 4y^2 \end{aligned}$$

これ以上, 項をまとめることはできないので, これで終了。

② $(2x+3y)(3x-4y)$

乗法公式 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を利用して展開する。

今回は, $a=2$, $b=3y$, $c=3$, $d=-4y$ だから

$$\begin{aligned} & (2x+3y)(3x-4y) \\ &= 2 \times 3x^2 + \{2 \times (-4y) + 3y \times 3\}x + 3y \times (-4y) \\ &= 6x^2 + (-8y+9y)x - 12y^2 \\ &= 6x^2 + xy - 12y^2 \end{aligned}$$

これ以上, 項をまとめることはできないので, これで終了。

◇トレーニング◇

(1) $(x-3y)(x-5y)$

(2) $(4x+3y)^2$

(3) $(3x-y)(2x+3y)$

解 (1) $x^2-8xy+15y^2$ (2) $16x^2+24xy+9y^2$ (3) $6x^2+7xy-3y^2$



式の展開 練習問題 e



8 乗法公式 ◇文字は2文字，指数は2乗まで，項は2つ ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(2x+3y)^2$

(2) $(3a-4b)^2$

(3) $(x+2y)(x-2y)$

(4) $(2a+5b)(a-3b)$

(5) $(3x-4y)(5y+4x)$

(6) $(3p+4q)(-3p+4q)$

(7) $(6x-7y)(3x+2y)$

(8) $(3s+4t)(2s-7t)$

(9) $(-x+2y)(-x-2y)$

(10) $(3ab+2)^2$

(11) $(5ab+4)(5ab-4)$

(12) $(3xy+4)(2xy-5)$

9 置き換え展開 ◇文字は2文字以上，指数は2乗まで，項は3つ以上

① $(x+y+3)(x+y-1)$

与えられた式は，左の多項式にも右の多項式にも「 $x+y$ 」がある。

→これを A に置き換えて，乗法公式を用いて展開する。

→ A での展開が終わったら， A を元の「 $x+y$ 」にもどして，最後まで展開する。

$$\begin{aligned} & (A+3)(A-1) \quad \leftarrow \text{「}x+y\text{」を「}A\text{」に} \\ & = A^2 + 2A - 3 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \text{ を利用} \\ & = (x+y)^2 + 2(x+y) - 3 \quad \leftarrow A \text{ を元の「}x+y\text{」に戻す} \\ & = (x)^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ を利用} \\ & = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 \end{aligned}$$

② $(a+b+c)(a-b-c)$

見たところ，与えられた式に同じ形は見当たらない。

そこで，同じ文字どうしで符号をチェック。 a ：同符号 b ：異符号 c ：異符号
よって，右の多項式の後ろ2つの項を「 $-()$ 」にすると，

$(a+b+c)(a-b-c) = (a+b+c)\{a-(b+c)\}$ となって，「 $b+c$ 」が同じ形として出現する。

→これを A に置き換えて，乗法公式を用いて展開する。

→ A での展開が終わったら， A を元の「 $b+c$ 」にもどして，最後まで展開する。

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(a-b-c) \\ & = (a+b+c)\{a-(b+c)\} \quad \leftarrow \text{右の多項式の後ろ2つの項を「}-()\text{」にする} \\ & = (a+A)(a-A) \quad \leftarrow \text{「}b+c\text{」を「}A\text{」に} \\ & = a^2 - A^2 \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)(x-a) = x^2 - a^2 \text{ を利用} \\ & = a^2 - (b+c)^2 \quad \leftarrow A \text{ を元の「}b+c\text{」に戻す} \\ & = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) \quad \leftarrow \text{乗法公式 } (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ を利用} \\ & = a^2 - b^2 - 2bc - c^2 \end{aligned}$$

10 組み合わせを工夫して置き換え展開

◇指数は2乗以上

① $(x+2y)^2(x-2y)^2$

2乗を一度バラバラにして, 乗法公式 $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$ が利用できる形を作って展開する。

$$\begin{aligned} & (x+2y)^2(x-2y)^2 \\ &= (x+2y)(x+2y)(x-2y)(x-2y) \quad \leftarrow 2 \text{ 乗をバラバラにする} \\ &= (x+2y)(x-2y)(x+2y)(x-2y) \quad \leftarrow \text{項を入れ替える} \\ &= (x^2-4y^2)(x^2-4y^2) \quad \leftarrow 2 \text{ つずつ展開} \\ &= (x^2-4y^2)^2 \quad \leftarrow \text{まとめる} \\ &= (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 4y^2 + (4y^2)^2 \quad \leftarrow \text{乗法公式で展開} \\ &= x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 \end{aligned}$$

② $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

2つずつ組み合わせて展開する。順番通りに展開すると, $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$ となり, さらに展開をすると計算が大変である。

そこで, 多項式の「2つ目の項の和が等しくなる」ような組み合わせを選択する。今回なら, 「 $(x+1)$ と $(x+4)$ 」「 $(x+2)$ と $(x+3)$ 」という組み合わせ (どちらも2つ目の項の和が5)

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) \quad \leftarrow \text{項を入れ替える} \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) \quad \leftarrow 2 \text{ つずつ展開} \\ &= (A+4)(A+6) \quad \leftarrow \text{「}x^2+5x\text{」を「}A\text{」に置き換え} \\ &= A^2+10A+24 \quad \leftarrow \text{乗法公式で展開} \\ &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24 \quad \leftarrow A \text{ を元の「}x^2+5x\text{」に戻す} \\ &= (x^2)^2+2 \times x^2 \times 5x+(5x)^2+10x^2+50x+24 \quad \leftarrow \text{乗法公式で展開} \\ &= x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24 \\ &= x^4+10x^3+35x^2+50x+24 \quad \leftarrow \text{同類項をまとめる} \end{aligned}$$

◇トレーニング◇

(1) 下の【解答の過程】は、 $(a+b+c)^2$ を展開した様子である。(＊)以降の解答の続きを書きなさい。ただし、答えは、 a についての降べきの順に並べて答えなさい。

【解答の過程】

$a+b = A$ とする。

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 \\ &= (A+c)^2 \\ &= (＊) \end{aligned}$$

(2) 下の【解答の過程】は、 $(a+b-c)(a+2b-c)$ を展開した様子である。() にあてはまる式や数を書きなさい。ただし、答えは、 a についての降べきの順に並べて答えなさい。

【解答の過程】

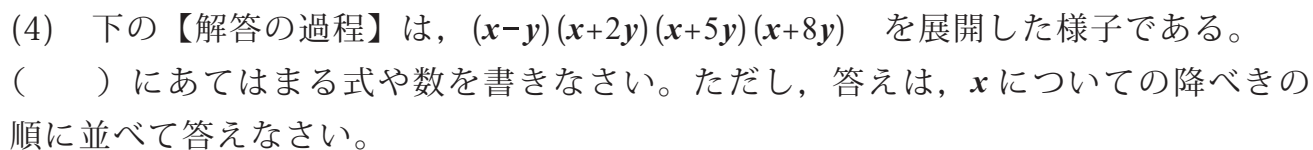
(ア) = A とする。

$$\begin{aligned} & (a+b-c)(a+2b-c) \\ &= (A+ (イ))(A+ (ウ)) \\ &= (エ) \\ &= ((オ))^2 + 3((オ))b + 2b^2 \\ &= (カ) \end{aligned}$$

(3) 下の【解答の過程】は、 $(2x+y)^2(2x-y)^2$ を展開した様子である。(＊)以降の解答の続きを書きなさい。ただし、答えは、 x についての降べきの順に並べて答えなさい。

【解答の過程】

$$\begin{aligned} & (2x+y)^2(2x-y)^2 \\ &= (2x+y)(2x+y)(2x-y)(2x-y) \\ &= (2x+y)(2x-y)(2x+y)(2x-y) \\ &= (＊) \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}+2\mathbf{y})(\mathbf{x}+5\mathbf{y})(\mathbf{x}+8\mathbf{y}) \\ &= (\text{ア} \quad \quad \quad) - 8\mathbf{y}^2)(\text{ア} \quad \quad \quad) + (\text{イ} \quad \quad \quad)) \\ & (\text{ア} \quad \quad \quad) = \mathbf{A} \text{ とする。} \\ &= (\mathbf{A}-8\mathbf{y}^2)(\mathbf{A}+ \text{イ} \quad \quad \quad)) \\ &= \mathbf{A}^2+ (\text{ウ} \quad \quad \quad) + (\text{エ} \quad \quad \quad) \\ &= (\text{ア} \quad \quad \quad)^2+2(\text{ア} \quad \quad \quad)\mathbf{y}^2+ (\text{エ} \quad \quad \quad) \\ &= (\text{オ} \quad \quad \quad) \end{aligned}$$



9 置き換え展開 ◇文字は2文字以上, 指数は2乗まで, 項は3つ以上 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(x-y+z)^2$

(2) $(2a+3b-5c)(2a+3b+5c)$

(3) $(x+y+z)(x-y-z)$

(4) $(2a+b-3x)^2$

(5) $(x-2y-3z)^2$

(6) $(2x+3y-z)(2x-3y+z)$

(7) $(x+y+3)(x+y-2)$

(8) $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$

(9) $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

(10) $(3x+a+2)(3x-a+2)$



10 組み合わせを工夫して置き換え展開

◇指数は2乗以上 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(x+2)(x+5)(x-2)(x-5)$

(2) $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)$

(3) $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$

(4) $(x-8)(x-6)(x+4)(x+2)$

(5) $(x+5)^2(x-5)^2$

(6) $(2a+3b)^2(2a-3b)^2$

(7) $(x^2+4y^2)(x-2y)(x+2y)$

(8) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(9) $(x+3y)(x-3y)(x^2+9y^2)$

(10) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

この講座は必須ではありませんが、時間が許せばぜひ取り組んでください。



素因数分解、昔習ったでしょ。あらゆる正の整数を、素数の積で表す、あれね。使いこなせると、そうれはもう役に立つの！

覚えてますよ。割り算を何回もやるんですよ。このあとの問題、見ただけでうんざりしそうですね。やるんですか？



次の整数を素因数分解し、結果を書きなさい。解答の書き方は、高校数学の方法に従う。たとえば、 $2^2 \times 3$ を $2^2 \cdot 3$ と書くこと。なお、素因数分解できない素数は、7 のように、そのまま書くこと。



ここを読んでも以上、ね。でも、これに慣れてある数を見て「分解するとうなる」ってわかると、この後、すごく楽になるの。がんばって。

1 ()	2 ()	3 ()	4 ()	41 ()	42 ()	43 ()	44 ()
5 ()	6 ()	7 ()	8 ()	45 ()	46 ()	47 ()	48 ()
9 ()	10 ()	11 ()	12 ()	49 ()	50 ()	51 ()	52 ()
13 ()	14 ()	15 ()	16 ()	53 ()	54 ()	55 ()	56 ()
17 ()	18 ()	19 ()	20 ()	57 ()	58 ()	59 ()	60 ()
21 ()	22 ()	23 ()	24 ()	61 ()	62 ()	63 ()	64 ()
25 ()	26 ()	27 ()	28 ()	65 ()	66 ()	67 ()	68 ()
29 ()	30 ()	31 ()	32 ()	69 ()	70 ()	71 ()	72 ()
33 ()	34 ()	35 ()	36 ()	73 ()	74 ()	75 ()	76 ()
37 ()	38 ()	39 ()	40 ()	77 ()	78 ()	79 ()	80 ()

option オプション講座 素因数分解 2

この講座は必須ではありませんが、時間が許せばぜひ取り組んでください。

81	82	83	84	108	120	121
() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()
85	86	87	88	125	128	150
() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()
89	90	91	92	160	169	180
() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()
93	94	95	96	196	200	216
() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()
97	98	99	100	225	240	256
() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()	() () () ()
				280	289	324
				() () () ()	() () () ()	() () () ()
				360	361	400
				() () () ()	() () () ()	() () () ()

and おぼえておきたい整数の2乗

次のリストは、10 から 20 までの整数の「2 乗」一覧です。これを暗記していると、大きな数値の計算が、ものすごく速く正確になります。もちろん、計算すれば答えは得られます。しかし、覚えていて何時でも取り出せることの効果は絶大です。掛け算九九のようなつもりで、書いて声に出して暗記してしまうことを強くおすすめします。

$10^2 = 100$	$14^2 = 196$	$18^2 = 324$
$11^2 = 121$	$15^2 = 225$	$19^2 = 361$
$12^2 = 144$	$16^2 = 256$	$20^2 = 400$
$13^2 = 169$	$17^2 = 289$	



たった 10 くらいを覚えるだけ。
とっても「お得」。やらなきゃ損、
と断言させてもらいましょ！

「展開」の反対が因数分解ですよね。
だったら、逆にするだけなのでかんたんですね。それ
だけなら、なんでわざわざやるんですか？



たしかにねえ…。でもね、理由はちゃんと2つあるの。

- 1：逆にするのはなかなか難しい
- 2：高校数学の全分野の基礎になる　ね！

でも、 $6x^2+6x=6x(x+1)$ だけでしょ？
これなら見ればわかりますよ。あ…もしかして…もっ
と長いのがあったりして…。



よく気がついたね。そう、もっと複雑になると…
 $(a+b)x^2+(a+b)x-2(a+b)$ とか、ね。
でもさっき、いいところに目をつけたのよ。

ほんとうですか！
照れますね。どこがいいところかって、カッコでまとめ
たことですか？
だったら、ルールが少しは見えた気が。



そのとおり。
でも、もう少し正確に。因数分解とは「多項式の
和」で表された式を「多項式の積」に変えること
なの。

またわかりません…？
展開とどう違うんですか。結局ははっきりしませ
ん。「和（足し算）」、「積（掛け算）」はわかりま
すが。



$6x^2+6x$ は、和が最後に残ってるでしょ。これが展開
の結果。因数分解の結果の、
 $6x(x+1)$ は、和が先で、最後が積ね。

う～ん…。
和の記号「+」をカッコの中に閉じ込めてやる、とい
うイメージで、合ってますか？
差の「-」も閉じ込めるんですか？





よろしい！ そのとおりだけど、「一」は閉じ込めちゃいけないものもあるので注意してね。
「負の数の一」は別なの。 $-x(y-1)$ はあり、ってこと。
じゃ、少しつけ加えるね。「素因数分解」覚えてる？

あああ…。
あの数字を細かく細かくバラすやつですね。練習しました。名前は因数分解と似ていますが、やることは似ているんですか？



ええ、本質は同じもの。
数値でやるのが「素因数分解」、文字式でやるのが「因数分解」。
共通点は「積の形で表す」なの。

積……掛け算の形ですね。またそれですか。
わかりました。でも、どうして掛け算の形にして、「プラス」を閉じ込めたりするんですか？



ナイス質問ね。「ある数がどういう部品からできているか」ということは、この後の数学のあらゆる分野で重要な。
 36 は $2^2 \cdot 3^2$ でしょ。

たしかに。でも、 $30+6$ じゃあだめなんですか？
または $9+9+9+9$ ，とか。
意味はわかりますし、結果は同じでしょ。



でも、「和」の形だと、無数の表し方があるの。
積にすれば、すべての整数は「素数の積」でただ1つの表し方にできるの。

まあ、たしかに「ただ1つの表し方にできる」っていいですね。それが理由で、「積」で表すことがそんなに重要なんですね、きっと。



ええ、そうなの。
ものすごく大きな数でも素因数分解すると、正体
がわかるの。 96457088 は $2^7 \cdot 7^3 \cdot 13^3$ ，ってね。

へえ、すごそうですね。
ともかく「展開の逆」「足し算・引き算の記号を（ ）
に閉じ込める」をおぼえますね。これで安心っ。





● GUIDANCE

式を「因数分解する」とは？

- 1 単項式の和または差の形の式を，多項式の積の形で表すこと
- 2 「展開」の逆を行うこと
- 3 因数分解をする一番の理由は，「方程式の解を求めやすくする」ため

1と2を，もう少しわかりやすく説明します。

因数分解の結果，和の形を積に直すということは，何を意味するのでしょうか。

▶「+」または「-」の記号を（ ）の中に閉じ込める◀

ということです。「+」「-」を裸で外に出さない，といってもよいでしょう。

※ただし，「 $-3x(x+1)$ 」の先頭のような，正負の意味を表す符号「マイナス」は外でかまいません。

足し算や引き算を（ ）の外に残さない，と理解してください。

これが「展開の逆」を意味します。

展開は，掛け算を全部行って，最後に「+」「-」記号で結ばれた式に直すということなのです。

次に，3「方程式の解を求めやすくする」ことについて説明します。

例えば2次方程式は，解の公式を利用することですべてを解くことができますが，計算が大変です。

もし，因数分解ができるタイプの方程式だとわかると，解を簡単に求めることができるのです。

例) $x^2+3x+2=0$ 因数分解する… $(x+1)(x+2)=0$ となる。

掛けて0になるということは $(x+1)$ と $(x+2)$ のどちらかが，0 ということです。

これで，方程式の解は， $x=-1$ または $x=-2$ となります。

便利ですね。同じように2次関数でも，因数分解は大活躍します。因数分解は，そのままで入試に出ることは多くありませんが，多くの分野の解決に必要なものなのです。

そして，原理がわかっただけでなく，すばやく正確に解けることが重要です。だから，これからみっちり練習しましょう。



そりや当然でしょ。何しろ高校数学の「問題」には，必ず「正解」があるんですから。解けるに決まっているのよ。

ややこしそうですね。でも，この内容をしっかり押さえれば確実に解ける，ということですか。



あのお…。そういうことを言ってるんじゃないんですけど。それでいいなら，どんな試験でも満点とれちゃいますよ…もお。



因数分解の解法を3つに分類してまとめます。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」
- ② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」
- ③ 乗法公式を利用する

ちなみに、最もシンプルな $6x^2+6x=6x(x+1)$ は、①の「くくり出す」です。
これから具体的方法を順に説明します。まずは①と②。くれぐれも最初の1～3の「式を因数分解するとは何をするのか」を忘れずに進んでください。困ったらこのページにもどりましょう。

① 式全体を共通因数で「くくり出す」

因数分解の基本は、それぞれの項から共通因数を探し、その共通因数をカッコの前に出すこと。
この操作を「くくる」という。

念のため「共通因数」について、「素因数分解」を思い出しましょう。
自然数12と28を比べます。それぞれどのような素数の組み合わせだったでしょうか。
 $12=2^2 \cdot 3$ $28=2^2 \cdot 7$ ですね。
すると、12と28は 2^2 を共有して持つ、といえます。この 2^2 が、12と28の共通因数です。
 $6x^2+6x=6x(x+1)$ では、 $6x$ が共通因数です。では、本題にもどります。

例： $2x^2+4x+6xy$

最初の作業は、3つの項「 $2x^2$ 」「 $4x$ 」「 $6xy$ 」に、共通因数がないかを探ること
今回は「 $2x$ 」
これがかっこ前に出して（くくって）、各項の式を共通因数で割ったものをかっこの中を書く。
 $2x^2+4x+6xy=2x(x+2+3y)$
これで終了です。

例： $a(b+2)+2(b+2)$

ここでも、最初の作業は共通因数がないか探すことです。
ただ、前の例とちがって単項式の和の形になっていないので、「 $b+2$ 」を「 A 」に置き換えます（置き換える文字は何でもよいのですが、アルファベット大文字がオススメ）。
同じ形の多項式は、1つの文字に置き換えることで共通因数を見つけ出しやすくなります。
この「置き換え」もたいへん重要です。同一の項に目をつけて、置き換えられるようにしましょう。

$$a(b+2)+2(b+2)=aA+2A$$

こうすると、「 aA 」と「 $2A$ 」には「 A 」という共通因数があることがわかるので、これでくくる。

$$aA+2A=A(a+2)$$

因数分解はこれで終了。しかし、「 A 」は私たち解答者の都合で置き換えられたものなので、最後に、置き換える前の式「 $b+2$ 」にもどして答えます。かっこをつけるのを忘れずに。

$$A(a+2)=(b+2)(a+2)$$

なお、答えの式の順番は、 $(a+2)(b+2)$ としてもかまいません。

困ったら前のページにもどってか
ら、もう一回このページを読んで



② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

因数分解をするために、最初に考えることは、「共通因数があるかどうか（くくれるかどうか）」です。
しかし、すべての問題で共通因数があるとは限りません。
共通因数が見つからない場合のキーワードは「着目」です。

例： $ab+a+b+1$

因数分解の最初の作業は、共通因数を探すことです。

この例には4つ項がありますが、すべての項についての共通因数はありません。

このままでは前に進みません。

このような場合は、「1つの文字に着目」して、その文字を含む項だけの共通因数を探します。

問題をシンプルにするために、「1つの文字に着目」して、一部でも因数分解してしまうのが、進め方の基本です。

今回は、「 a 」に着目してみます。

a をもっている項は、「 ab 」と「 a 」の2つ。

この2つの共通因数「 a 」でくくり出します。このとき、着目していない項は「丸写し」します。

$$ab+a+b+1$$

$$=a(b+1)+b+1$$

ここから、全体の共通因数を探しますが、単項式の和の形になっていないので、探しやすいように工夫。

「 $b+1$ 」が共通因数に見えますね。そこで、「 $b+1$ 」を仮に「 A 」に置き換えます。

$$a(b+1)+b+1$$

$$=aA+A$$

スッキリしましたね。

こうすると、「 aA 」と「 A 」には「 A 」という共通因数があることがわかりますね。これでくくり出します。ゴールが見えてきました。

$$aA+A$$

$$=A(a+1)$$

これで、因数分解の目標に到達しました。

「因数分解の目標」って何でしたか？ 常に忘れないように。

【和の記号「 $+$ 」はすべて（ ）の中に閉じ込める】でしたね（引き算の「 $-$ 」も）。

最後に、「 A 」を「 $b+1$ 」にもどして完成です。

$$A(a+1)=(b+1)(a+1) \quad ※(a+1)(b+1) \text{でも可}$$

はあ。ひと仕事終えた、って感じですね。
「共通因数をくくり出す」「共通因数を1つ
の文字に置き換える」ですね。



それって、次のように因数分解できるのよ。
【共通因数を「くくり出す」「1つの文字に
置き換える】ってね。

では、例題に進みます！

1 単項式をくくり出す

$$2mxy - 4mx + 8my$$

式全体を共通因数で「くくり出す」

$2mxy$, $-4mx$, $8my$ では, 「2」, 「 m 」が共通因数なので, これらでくくる。

$$2mxy - 4mx + 8my = 2m(xy - 2x + 4y)$$

「多項式の積」の形になり, 無事に因数分解完了。

2 多項式をくくり出す

① $(x+y)a + 2(x+y)$

式全体を共通因数で「くくり出す」

$x+y$ を A と置き換える。

$$(x+y)a + 2(x+y) = aA + 2A$$

aA , $2A$ では, 「 A 」が共通因数なので, これでくくる。

$$aA + 2A = A(a+2)$$

「多項式の積」の形になったが, A は勝手に置き換えたものなので, 元に戻す。

$$A(a+2) = (x+y)(a+2)$$

これで無事に因数分解完了。

とにかく共通因数を見つけるか作るかして, くくりだすの。
最初だからゆっくり進めてね。



② $a(x-y) - b(y-x)$

式全体を共通因数で「くくり出す」

$a(x-y) - b(y-x)$ だと一見置き換えがなさそうに見えるが, 後ろの項は「 $+b(x-y)$ 」と変形できる。

$$a(x-y) - b(y-x) = a(x-y) + b(x-y)$$

$x-y$ を A に置き換える。

$$a(x-y) + b(x-y) = aA + bA$$

aA , bA では, 「 A 」が共通因数なので, これでくくる。

$$aA + bA = A(a+b)$$

「多項式の積」の形になったが, A は勝手に置き換えたものなので, 元に戻す。

$$A(a+b) = (x-y)(a+b)$$

これで無事に因数分解完了。

このように「変形して共通因数を作る」ことはとても重要な方法。



因数分解 1 例題 a



◇トレーニング◇

次の (1), (2) を因数分解する。() にあてはまる式を書きなさい。

(1) $4x^3yz - 6xy^2z + 8xy^3$

3 つの項の共通因数は, $2xy$ なので,

$4x^3yz - 6xy^2z + 8xy^3 = 2xy((\text{ア} \quad \quad \quad))$ である。

(2) $2a(c-2d) + b(2d-c)$

$2a(c-2d) + b(2d-c) = 2a(c-2d) - b((\text{イ} \quad \quad \quad))$

ここで, $(\text{イ} \quad \quad \quad) = A$ と置くと, $2aA - bA$ となるので,

$2aA - bA = A(2a-b)$

A を元にもどして, $A(2a-b) = ((\text{ウ} \quad \quad \quad))(2a-b)$

解 ア $2x^2z - 3yz + 4y^2$ イ $c-2d$ ウ $c-2d$



因数分解 1 練習問題 a



1 単項式をくくりだす

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $6a^2b - 8ab$

(2) $2x^2y + 6xy^2$

(3) $2x^2y + 4xy - y$

(4) $3x^2y + 6xy + 9xy^2$

(5) $6x^3y^2 - 3x^2y$

(6) $2x^2yz - 3xy^2z$

2 多項式をくくり出す

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(a+b)x - (a+b)y$

(2) $(a-b)^2 + c(b-a)$

(3) $a(x+1) - (x+1)$

(4) $(a-b)xy + (b-a)y^2$

(5) $(2a-3b)(x-y) + (a-3b)(x-y)$

(6) $x(a-3b) + 2y(3b-a)$

3 全文字 1 次, 1 つの文字に着目

$$ax - x - a + 1$$

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので, 次へ進む。

② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

a と x がどちらも 1 次式の場合は, どちらか 1 つの文字に着目してくくる。

(今回は x に着目することにする)

$$ax - x - a + 1 = x(a - 1) - a + 1$$

最初にもどって確認し直す。

①式全体を共通因数で「くくり出す」

$x(a - 1) - a + 1$ だと一見置き換えがなさそうに見えるが, 後ろの項は「 $-(a - 1)$ 」と変形できる。

$$x(a - 1) - a + 1 = x(a - 1) - (a - 1)$$

$a - 1$ が同じなので, A に置き換える。

$$x(a - 1) - (a - 1) = xA - A$$

A が共通因数なので, A でくくる。

$$xA - A = A(x - 1)$$

「多項式の積」の形になったが, A は勝手に置き換えたものなので, 元に戻す。

$$A(x - 1) = (a - 1)(x - 1)$$

これで無事に因数分解完了。



因数分解 1 例題 b



◇トレーニング◇

$ax-2x-ay+2y$ を因数分解する。() にあてはまる式を書きなさい。

x に着目してくくる x ((ア)) $-ay+2y$

後ろの 2 項を y に着目してくくる x ((ア)) $-y$ ((イ))

(ア) $=A$ と置くと, $xA-yA$ となる。

A でくくる A ((イ))

A を元にもどして答えを書く (ウ)

SAMPLE

解 ア $a-2$ イ $x-y$ ウ $(a-2)(x-y)$



因数分解 1 練習問題 b



3 全文字 1 次, 1 つの文字に着目 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $ab+a+b+1$

(2) $2ab-2a-b+1$

(3) $1+2ab+a+2b$

(4) $xyz+xy-2yz-zx-x-2y+2z+2$

(5) $2ay+3by+6ax+9bx$

(6) $abxy+ab-2xy-2$

(7) $ax+bx+ay+by+2a+2b$

(8) $2ax-2bx+4x+ay-by+2y-az+bz-2z$



● GUIDANCE

乗法公式の利用①

因数分解の主な 3 つの解法をもう一度確認します。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」
- ② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」
- ③ 乗法公式を利用する

今回は③。「公式」が使えると聞くと、「それは都合がいい」と感じる人も多いのでは。展開のところで学んだ乗法公式を活用します。しかし、これはあくまでも最後の手段。①②ができそうにない場合、①②でこの先に進めそうにない場合に使えるというものです。

例： $x^2 + 5x + 6$

因数分解はまず、①共通因数があるか確認することから、です。共通因数はありません。

次に、② 1 つの文字に着目して共通因数を部分的にくくり出す、ですね。今回は「 x^2 」と「 $5x$ 」が、共通因数「 x 」をもっているの、次のように変形できます。

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x + 6 \\ = & x(x+5) + 6 \end{aligned}$$

しかし、これ以上式変形できません。また、多項式の積の形になっていないので、これでは因数分解をしたとはいえません。このやり方では因数分解できません。

そこで、「 x^2+5x+6 」を「 $x^2+2x+3x+6$ 」という形に変形し、改めて共通因数を考えてみます。

(このように、必要に応じて項を分解して共通因数を「作り出す」ことも重要な方法です。詳しくは後で)そして、「 x^2 」と「 $2x$ 」の共通因数「 x 」でくくります。

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 3x + 6 \\ = & x(x+2) + 3x + 6 \end{aligned}$$

後ろの 2 つの項「 $3x$ 」と「 6 」には、共通因数「 3 」があるので、

$$\begin{aligned} & x(x+2) + 3x + 6 \\ = & x(x+2) + 3(x+2) \end{aligned}$$

「 $x+2$ 」を「 A 」とおきかえて、 A でくくります。

$$\begin{aligned} & x(x+2) + 3(x+2) \\ = & xA + 3A \\ = & A(x+3) \end{aligned}$$

最後に、「 A 」を「 $x+2$ 」にもどして完了です。

$$\begin{aligned} & A(x+3) \\ = & (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

しっかり+を()の中に閉じ込められましたね。
できました。しかし…。

面倒がらずにしっかり読んでね。
できれば同じ式を書きながら追っ
かけてほしいくらい。



「 $5x$ を突然 $2x+3x$ に分けるなんて思いつかない！」と思った人もいるでしょう。タネを明かします。

突然現れた 2 と 3 の正体は、「和が 5, 積が 6」となる 2 つの数の組み合わせなのです。

5 は x の係数で, 6 は定数項ですね。

これはまさに, 展開を学んだときに覚えた乗法公式

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ の反対です。

だから, 共通因数でくくることができない因数分解の場合, 乗法公式の形にあてはまるものが見つかったら, その反対の計算をすれば因数分解ができる, ということなのです。

◆乗法公式 (因数分解用に左右を逆転)

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

例: $x^2+10x+16$

① 共通因数 → ない。

② Ax に着目 → $x(x+10)+16$ から前に進めない。どうしましょう？

ここから, 乗法公式を利用して因数分解することを考えます。

「和が 10, 積が 16」となるような 2 つの整数を考えます。

このとき, 積の組み合わせには限りがあるので, 積から考えるとよいでしょう。

積が 16 → 1 と 16, 2 と 8, 4 と 4, -1 と -16, -2 と -8, -4 と -4

このうち, 和が 10 になる組み合わせは…「2 と 8」がありました。

これで一気に進みます。

$$\begin{aligned} & x^2+10x+16 \\ &= (x+2)(x+8) \quad ※ (x+8)(x+2) \text{ も可} \end{aligned}$$



そうね。もし, 高校で学ぶ因数分解を全部解けるように, あらゆるパターンの公式を作ると…1000 種類くらいだけど, どう？

乗法公式って便利ですね。因数分解を全部公式にあてはめてできたらいいんですが, 教えてくださいませんか？



要りません。

では, 例題に進みます！

4 乗法公式 ◇文字 1 つ

① $x^2 - 3x - 40$

乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ に当てはめる。

「和が -3 」かつ「積が -40 」の組み合わせ $\rightarrow -8$ と 5

$$x^2 - 3x - 40 = (x - 8)(x + 5)$$

「多項式の積」の形になり、無事に因数分解完了。

② $25a^2 - 81$

乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ に当てはめる。

「 $25=5^2$ 」かつ「 $81=9^2$ 」

$$25a^2 - 81 = (5a + 9)(5a - 9)$$

「多項式の積」の形になり、無事に因数分解完了。

5 乗法公式 ◇文字 2 つ

① $25x^2 + 40xy + 16y^2$

乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ に当てはめる。

「 $25x^2 = (5x)^2$ 」かつ「 $16y^2 = (4y)^2$ 」かつ「 $40xy = 2 \times 5x \times 4y$ 」

$$25x^2 + 40xy + 16y^2 = (5x + 4y)^2$$

「多項式の積」の形になり、無事に因数分解完了。

② $9x^2 - 64y^2$

乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ に当てはめる。

「 $9x^2 = (3x)^2$ 」かつ「 $64y^2 = (8y)^2$ 」

$$9x^2 - 64y^2 = (3x + 8y)(3x - 8y)$$

「多項式の積」の形になりました。無事に因数分解完了。



因数分解 1 例題 c



◇トレーニング◇

次の (1), (2) を因数分解するのに, 利用する公式を①～④の中から選びなさい。また, それを利用して因数分解しなさい。

(1) $x^2+10x-24$

(2) $4x^2+4xy+y^2$

① $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

② $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

③ $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

④ $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

SAMPLE

解 (1) ①, $(x-2)(x+12)$ (2) ②, $(2x+y)^2$



因数分解 1 練習問題 c



4 乗法公式

◇文字1つ

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $x^2 - 2x - 35$

(2) $x^2 - 8x - 9$

(3) $x^2 - 20x + 96$

(4) $9x^2 + 6x + 1$

(5) $4x^2 + 4x + 1$

(6) $a^2 - 169$

(7) $x^2 + 5x - 6$

(8) $x^2 - 7x + 12$

(9) $81x^2 - 121$

(10) $x^2 - 40x - 84$

(11) $9a^2 - 0.25$

(12) $x^2 - 13x + 22$



因数分解 1 練習問題 c



5 乗法公式

◇文字 2 つ

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $x^2 + 7xy - 30y^2$

(2) $a^2 + 12ab + 36b^2$

(3) $4x^2 - 9y^2$

(4) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(5) $9a^2 - 42ab + 49b^2$

(6) $x^2 + 5xy - 14y^2$

(7) $x^2 - 4y^2$

(8) $9a^2 - 25b^2$

(9) $16a^2 + 24ab + 9b^2$

(10) $a^2 - 12ab + 32b^2$

(11) $a^2 - 10ab + 25b^2$

(12) $36x^2 - 49y^2$



● GUIDANCE

乗法公式の利用②

因数分解の主な 3 つの解法をもう一度確認します。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」
- ② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」
- ③ 乗法公式を利用する

では、「乗法公式」の利用についての次のステップに進みます。

例： $6x^2+11x+4$

- ① 式全体でくくりだすことができる「共通因数」はありません。
- ② 1 つの文字に着目して共通因数をくくり出すを試みます。
「 $6x^2$ 」と「 $11x$ 」が、共通因数「 x 」をもっています。実行すると、 $6x^2+11x+4=x(6x+11)+4$ となります。
「 $+4$ 」が残ってしまい、これ以上進められなさそうです。
- ③ 乗法公式を利用して解くことを考えます。 x^2 に 1 以外の係数がある場合、「和が〇〇，積が〇〇」という考え方は使えません。具体的には、乗法公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ は利用できない，ということです。

では，どの乗法公式を使うことができるでしょうか。

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ です。

この公式を使う際のポイントは，「 x^2 の係数 ac 」と「 x の係数 $ad+bc$ 」と定数項「 bd 」の関係を作ることができるか見抜くことです。

それぞれの係数は 6, 11, 4 です。 ac の可能性は 1, 6（または逆）および 2, 3（または逆）です。

これに対し， $ad+bc$ が 11， bd が 4 となる組み合わせを考えます。

$ad+bc$ が 11 となるには， ad と bc を一つずつのかたまりと考えると，多くの組み合わせができるので，先に進めます。

bd が 4 となるための組み合わせは，1, 4（または逆）および 2, 2 です。

以上から $ad+bc$ が 11 となる組み合わせをチェックします。一度，整理します。

「1 と 6」，「1 と 4」の場合 → 1 と 24（合計 25），6 と 4（合計 10）

「1 と 6」，「2 と 2」の場合 → 2 と 12（合計 14）

「2 と 3」，「1 と 4」の場合 → 2 と 12（合計 14），8 と 3（合計 11）

「2 と 3」，「2 と 2」の場合 → 4 と 6（合計 10）

11 になるのは，「2 と 3」「1 と 4」の組み合わせだけです。

$a=2$ ， $b=1$ ， $c=3$ ， $d=4$ と，なります。

よって答えは， $6x^2+11x+4=(2x+1)(3x+4)$ となる。

解決しましたが，これ以上複雑な数を使うと，途中でクラッシュしてしまいそうですね。
そこで，「図」を使って解決する方法を紹介します。



はい…もうクラッシュしそうです。
今すぐ，その「図」を教えてください。

この因数分解は、下のように図にして考えることができます。
よく見て、理解してください。

①	②	③	④
$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \\ 3 \quad 1 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \rightarrow 12 \\ 3 \quad 1 \rightarrow 2 \\ \hline 6 \quad 4 \quad \text{11} \end{array}$
		⑤	⑥
		$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ 3 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \rightarrow 3 \\ 3 \quad 4 \rightarrow 8 \\ \hline 6 \quad 4 \quad \text{11} \end{array}$

- ① まず、「 x^2 」「定数」「 x 」の順に、係数の数字を書きます。
 ② 次に、積が左下に書いた数字となる組み合わせを一つ書きます。
 ③ 続けて、積が中央下に書いた数字となる組み合わせを一つ書きます。
 ④ 書いた組み合わせを「斜め」にかけます。その答えをそれぞれの右端に書きます。その2つの数を足して、右下の数字になれば成功，ならなければ失敗（④は失敗の例）。
 失敗したら、②にもどって、成功するまで組み合わせを考える（⑤→⑥が成功の例）。
 ⑤⑥ で求める数値が出ました。成功です。

④や⑥にある「斜めにかける」操作から、この方法を、よく「たすき掛け」と呼びます。

◆乗法公式 $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$ にあてはまる数値は「たすき掛け」で求める。

例： $2x^2 - 5x - 3$

たすき掛けの実例を記します。

①	②	③	④
$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 2 \quad -3 \quad -5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 2 \quad -3 \quad -5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \\ 2 \quad 3 \\ \hline 2 \quad -3 \quad -5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \rightarrow -2 \\ 2 \quad 3 \rightarrow 3 \\ \hline 2 \quad -3 \quad \text{-5} \end{array}$
		⑤	⑥
		$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \\ 2 \quad 1 \\ \hline 2 \quad -3 \quad -5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \rightarrow -6 \\ 2 \quad 1 \rightarrow 1 \\ \hline 2 \quad -3 \quad \text{-5} \end{array}$



ほらっ。こうやって「たすき掛け」を使いこなせば、高校レベルの因数分解もゴールが見えるのよ。さ、慣れてね！

では、例題に進みます！

因数分解 1 例題 d

6 「たすき掛け」の因数分解

◇文字 1 つ

① $2x^2 - 7x + 3$

乗法公式を利用する。

x^2 の係数が 1 でないので、

乗法公式 $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$ に当てはめる。

$$2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$$

「多項式の積」の形になり、無事に因数分解完了。

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & -1 \rightarrow -1 \\ 1 & \times & -3 \rightarrow -3 \\ \hline 2 & & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ -3 \\ -7 \end{array}$$

② $3x^2 - 10x + 3$

乗法公式を利用する。

x^2 の係数が 1 でないので、

乗法公式 $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$ に当てはめる。

$$3x^2 - 10x + 3 = (3x - 1)(x - 3)$$

「多項式の積」の形になり、無事に因数分解完了。

$$\begin{array}{rcl} 3 & \times & -1 \rightarrow -1 \\ 1 & \times & -3 \rightarrow -3 \\ \hline 3 & & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ -3 \\ -10 \end{array}$$

7 「たすき掛け」の因数分解

◇文字 2 つ

$6x^2 - xy - 12y^2$

乗法公式を利用する。

x^2 の係数が 1 でないので、

乗法公式 $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$ に当てはめる。

$$6x^2 - xy - 12y^2 = (3x + 4y)(2x - 3y)$$

「多項式の積」の形になり、無事に因数分解完了。

$$\begin{array}{rcl} 3 & \times & 4y \rightarrow 8y \\ 2 & \times & -3y \rightarrow -6y \\ \hline 6 & & -12y^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8y \\ -6y \\ -2y \end{array}$$

「たすき掛け」のやり方は、前のページを見直せばいいんですよ？
困ったらもどります。これでー安心。





因数分解 1 例題 d



◇トレーニング◇

次の式を因数分解する。下の図を完成させ、因数分解しなさい。

$$2x^2 + 15x + 7$$

$$2 \quad \rightarrow$$

$$1 \quad \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 7 \quad 15 \\ \hline \end{array}$$

SAMPLE

解 図は右。因数分解は $(2x+1)(x+7)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \times \quad 1 \rightarrow 1 \\ 1 \quad \times \quad 7 \rightarrow 14 \\ \hline 2 \quad 7 \quad 15 \end{array}$$



因数分解 1 練習問題 d



6 「たすき掛け」の因数分解

◇文字 1 つ

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $3x^2+5x+2$

(2) $3a^2+5a-2$

(3) $4a^2-7a-15$

(4) $2x^2+7x+3$

(5) $8x^2-14x+3$

(6) $2x^2+13x+15$

(7) $6x^2-11x-4$

(8) $2x^2+15x+7$

(9) $2x^2-x-3$

(10) $8x^2-6x-5$

(11) $6x^2+11x+3$

(12) $3x^2+x-4$

(13) $2x^2-3x-5$

(14) $8x^2+14x-15$



因数分解 1 練習問題 d



7 「たすき掛け」の因数分解

◇文字 2 つ

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $6p^2 + 7pq - 3q^2$

(2) $3x^2 - 10xy + 3y^2$

(3) $3x^2 - 10xy - 8y^2$

(4) $3x^2 - 2xy - 8y^2$

(5) $2x^2 + 9xy - 5y^2$

(6) $3x^2 + 4xy - 4y^2$

(7) $3x^2 - 4xy - 15y^2$

(8) $3x^2 - 10xy - 8y^2$

(9) $10x^2 - 17xy + 6y^2$

(10) $2x^2 + 9xy - 5y^2$

(11) $18x^2 - 9xy - 20y^2$

(12) $18a^2b^2 - 39ab - 7$

(13) $8x^2 - 6xy - 5y^2$

(14) $8a^2 - 14ab - 15b^2$

因数分解の解き方は一通り学んだって話でしたよね。
じゃあ、もうおしまいってことですね。
今日はまだ早いですが、もう帰りま〜す！



おいおい、待ちなさいって。
これから、今までの手順を復習しながら進めるんだから。
じゃあまず、確認だ。
因数分解の手順①〜③を言ってごらん。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」
 - ② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」
 - ③ 乗法公式を利用する
- ほら、言えたでしょ。もう大丈夫ですね。じゃっ！



おお、いいね。でも、待って！
これからは言えるだけじゃなくって、使いこなせないといけないんだ。中学の理数の公式で「言えるけど使えない」ってあったんじゃないかな？

はい…。たしかに。それで点を落としたこともあります。
数を代入しようとしてもうまくいかなくて…。
じゃあ、どうやったらいいんですか？ たくさん問題を解けばいいってことですか？



それもいいけど、もっと大切なことを伝えよう。
第一に「理解しながら解く」こと。
第二に「できなかったとき、理由を解明する」こと。
何をしているのかわからないまま解かないことだよ。

以外にふつうですね。
ここの GUIDANCE や説明をよく読むことですね。
ああ、ポイントを思い出しました。
「足し算・引き算の記号をカッコの中に」 ですね。



そのとおり、わかってきたね。
じゃあ、続きをしっかりと読むこと。それから、どっさり問題があるから、どんどん解かせてあげよう！



はあ…、結局そういう展開なんですね。

これは「教材」だからねえ。



● GUIDANCE

因数分解の解法 まとめ

因数分解の主な3つの解法をもう一度確認します。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」
- ② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」
- ③ 乗法公式を利用する

問題を見たら、まず①→②→③の順で確認します。

もう少し詳しくすると、次のようになります。

②を行ったあとに、また①にもどって再確認します。

③を行ったあとに、また①にもどって再確認します。

「なぜ何回ももどるのか？」と疑問に思いましたか。もったもです。しかし、②の結果、③の結果によって、新たに共通因数が見つかるかもしれないから、確認すべきなのです。では、例を見てください。

例： $2x^2-10x+12$

① 式全体を共通因数で「くくり出す」からスタートです。

今回は、「 $2x^2$ 」「 $-10x$ 」「 12 」に共通因数「 2 」が存在するので、 2 でくくり出します。

$$\begin{aligned} 2x^2-10x+12 \\ =2(x^2-5x+6) \end{aligned} \quad \text{次に、カッコ（ ）の中の式について、②に進みます。}$$

② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」ことができるかどうか。

x に着目して前2項をくくってみます。

$$\begin{aligned} 2(x^2-5x+6) \\ =2\{x(x-5)+6\} \end{aligned} \quad \text{…しかし、これ以上変形できません。}$$

また、「多項式の積」の形になっていません。プラス+記号を、大カッコ { } の中には閉じ込めました。が、カッコ () の中に閉じ込めねばなりません。不十分なのです。

このやり方ではここまでが限界です。

③乗法公式を利用することを考えます。

乗法公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ に当てはめてみます。

「和が-5、積が6」となるような2つの数を考えます。

積が6 → 1と6, 2と3, -1と-6, -2と-3

この中で、和が-5となる組み合わせは、「-2と-3」です。

これによって、

$$\begin{aligned} 2(x^2-5x+6) \\ =2(x-2)(x-3) \end{aligned} \quad \text{と式変形ができました。}$$

これは、「多項式の積」の形になっています。因数分解はこれで終了です。

もう一つ続けます。

1問解くたびに、毎回こんな調子で進んだりもどったりするんですかあ…。折れそうです。



例： $x^2 - (2x+1)^2$

因数分解 1 の例題 b と同様に、たとえば $x+a$ のような同じ多項式が 2 つ以上ある場合、まとめて 1 つの文字 (A など) に置き換えることを試みます。これで、因数分解の手順を進めやすくなります。今回は「 $2x+1$ 」を「 A 」と置き換えて進めます。

ここでは、上の式から「 $2x+1$ 」を見つけることがポイントです。そう、2 乗になっています。

最初に置き換えを行う

$$\begin{aligned} & x^2 - (2x+1)^2 \\ & = x^2 - A^2 \end{aligned} \quad \text{この後は手順通り考えます。}$$

① 式全体を共通因数で「くくり出す」ことからです。ありませんね。

② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」ことができるかどうか。できませんね。

③ 乗法公式を利用することを考えます。

今回は、乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ を利用可能とわかります(忘れた人はページをもどしてください)。

$$\begin{aligned} & x^2 - A^2 \\ & = (x+A)(x-A) \end{aligned} \quad \text{となります。多項式の積の形になりました。終了です。}$$

と、言いたいところですが、「 A 」はこの場で勝手に作った「仮の文字」です。元にもどさないと正解になりません。

A を元にもどします。

$$\begin{aligned} & (x+A)(x-A) \\ & = \{x+(2x+1)\} \{x-(2x+1)\} \\ & = (x+2x+1)(x-2x-1) \end{aligned} \quad \text{ここで終わり...といきたいところですが、待ってください！}$$

それぞれのカッコの中に、同類項の計算(足し算)があります。必ず終わらせてください。

$$\begin{aligned} & (x+2x+1)(x-2x-1) \\ & = (3x+1)(-x-1) \end{aligned}$$

カッコの中の項それぞれについて、①、②、③の手順を改めて考える。

めんどろに感じるでしょうが、もっともっと複雑な因数分解では、この手順をもれなく適用するのが正解への道です。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」→ 共通因数はない
- ② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」→ くくれない
- ③ 乗法公式を利用する → 利用できない

以上の確認ができたので、これでほんとうに終了です。

※参考： $(3x+1)(-x-1)$ のうち、 $(-x-1)$ を -1 でくくって、 $-(3x+1)(x+1)$ とする考え方もあります。



もうしばらくだ。「慣れ」が大切。よく見て「これ、どう解決するの?」って考えながら、「くくり出す・乗法公式を使う・置き換える」場所を探すんだ。いずれ「見える」ってなる!

はあい…。もうしばらくですね…。

● では、例題に進みます!

1 くくり出す + 乗法公式

① $2x^3 - 12x^2 + 18x$

①式全体を共通因数で「くくり出す」

$2x^3$, $-12x^2$, $18x$ では, 「2」と「 x 」が共通因数なので, これにくくる。

$$2x^3 - 12x^2 + 18x = 2x(x^2 - 6x + 9)$$

③かっこの中の式について, 乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ に当てはめる。

「 $9 = 3^2$ 」かつ「 $6 = 2 \times 3$ 」

$$2x(x^2 - 6x + 9) = 2x(x - 3)^2$$

「多項式の積」の形になり, 無事に因数分解完了。

② $-12x^2 + 22xy - 8y^2$

①式全体を共通因数で「くくり出す」

$-12x^2$, $22xy$, $-8y^2$ では, 「-2」が共通因数なので, これにくくる。

$$-12x^2 + 22xy - 8y^2 = -2(6x^2 - 11xy + 4y^2)$$

③かっこの中の式について, 乗法公式を利用する

x^2 の係数が 1 でないので,

乗法公式 $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ に当てはめる。

$$-2(6x^2 - 11xy + 4y^2) = -2(2x - y)(3x - 4y)$$

「多項式の積」の形になり, 無事に因数分解完了。

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & -y \rightarrow -3y \\ 3 & \times & -4y \rightarrow -8y \\ \hline 6 & & 4y^2 - 11y \end{array}$$



因数分解 2 例題 a



◇トレーニング◇

$2x^3 - 10x^2 - 12x$ を因数分解する。() にあてはまる式を書きなさい。

共通因数は (ア) なので,

これにくる (イ)

かっこの中は, 乗法公式を利用した因数分解

「和が -5 , 積が -6 」の組み合わせは, (ウ) と (エ) なので,

因数分解した式は (オ)

SAMPLE

解 ア $2x$ イ $2x(x^2 - 5x - 6)$ ウ・エ $-6 \cdot 1$ (順不同) オ $2x(x-6)(x+1)$



因数分解 2 練習問題 a



1 くくり出す + 乗法公式

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $4pqx^2 - 36pqy^2$

(2) $9x^3 + 6x^2 + x$

(3) $9x^3 - 12x^2 + 4x$

(4) $2x^2y - 8xy + 8y$

(5) $3x^2y - 2xy^2 - 8y^3$

(6) $8x^2 - 18y^2$

(7) $-32a^2 + 48a - 18$

(8) $18a^3b + 9a^2b - 20ab$

(9) $8x^3y - 36x^2y^2 - 20xy^3$

(10) $(a+b)x^2 + (a+b)x - 2(a+b)$



2 置き換えて乗法公式

① $9x^2 - (x-1)^2$

因数分解をしやすいくするため、多項式である「 $x-1$ 」を「 A 」と置き換える。

$$9x^2 - (x-1)^2 = 9x^2 - A^2$$

手順を一つずつ確認する。

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので、次へ進む。

②1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

部分的にくくり出しても「多項式の積」をつくり出すことができないので、次へ進む。

③乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2 - A^2 = (x+A)(x-A)$ に当てはめる。「 $9x^2 = (3x)^2$ 」

$$9x^2 - A^2 = (3x+A)(3x-A)$$

「多項式の積」の形になったが、 A は勝手に置き換えたものなので、元に戻す。

$$(3x+A)(3x-A) = \{3x+(x-1)\} \{3x-(x-1)\} = (3x+x-1)(3x-x+1)$$

さらに、かっこの中の同類項を計算する

$$(3x+x-1)(3x-x+1) = (4x-1)(2x+1)$$

これで無事に因数分解完了。

② $(x+1)^2 - (x+1) - 2$

因数分解をしやすいくするため、多項式である「 $x+1$ 」を「 A 」と置き換える。

$$(x+1)^2 - (x+1) - 2 = A^2 - A - 2$$

手順を一つずつ確認する。

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので、次へ進む。

②1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」



因数分解 2 例題 b



部分的にくくり出しても「多項式の積」をつくり出すことができないので、次へ進む。

③乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ に当てはめる。「和が -1 」かつ「積が -2 」

$$A^2-A-2=(A-2)(A+1)$$

「多項式の積」の形になったが、 A は私たちが勝手に置き換えたものなので、元に戻す。

$$(A-2)(A+1)=(x+1-2)(x+1+1)$$

さらに、かっこの中の同類項を計算する

$$(x+1-2)(x+1+1)=(x-1)(x+2)$$

これで無事に因数分解完了。

3 置き換えて乗法公式を 2 回使用

$$(x^2-5x)^2+8(x^2-5x)+16$$

因数分解をしやすいくするため、多項式である「 x^2-5x 」を「 A 」と置き換える。

$$(x^2-5x)^2+8(x^2-5x)+16=A^2+8A+16$$

手順を一つずつ確認する。

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので、次へ進む。

②1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

部分的にくくり出しても「多項式の積」をつくり出すことができないので、次へ進む。

③乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ に当てはめる。「 $16=4^2$ 」かつ「 $8=2\times 4$ 」

$$A^2+8A+16=(A+4)^2$$

多項式の積の形になったが、 A は私たちが勝手に置き換えたものなので、元に戻す。

$$(A+4)^2=(x^2-5x+4)^2$$



因数分解 2 例題 b



かっこの中について、①から確認

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので、次へ進む。

②1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

部分的にくくり出しても「多項式の積」をつくり出すことができないので、次へ進む。

③乗法公式を利用する

乗法公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ に当てはめる。「和が -5 」かつ「積が 4 」

$$(x^2-5x+4)^2=\{(x-1)(x-4)\}^2$$

最後に、指数法則を利用して

$$\{(x-1)(x-4)\}^2=(x-1)^2(x-4)^2$$

これで無事に因数分解完了。

SAMPLE



因数分解 2 例題 b



◇トレーニング◇

次の (1), (2) を因数分解する。() にあてはまる式を書きなさい。

(1) $(a+b)^2 - 2(a+b) + 1$

$a+b=A$ とおく $A^2 - 2A + 1$

乗法公式を利用して (ア)

A を元にもどして (イ)

(2) $(x^2 - 4x)^2 + 5(x^2 - 4x) + 6$

$x^2 - 4x = A$ とおく $A^2 + 5A + 6$

乗法公式を利用して (ア)

A を元にもどして (イ)

かっこの中をさらに乗法公式を利用して (ウ)

解 (1) ア $(A-1)^2$ イ $(a+b-1)^2$

(2) ア $(A+2)(A+3)$ イ $(x^2-4x+2)(x^2-4x+3)$ ウ $(x^2-4x+2)(x-1)(x-3)$



2 置き換えて乗法公式

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(2x+5)^2-9$

(2) $(x+y)^2-(y+z)^2$

(3) $(a+b)^2+2(a+b)+1$

(4) $(x+y)^2-4(x+y)+3$

(5) $(x+2y)^2-5(x+2y)+6$

(6) $(x+1)^2-(x+1)-30$

(7) $(x-y)^2+7(x-y)z+10z^2$

(8) $(x-2y)^2-6(x-2y)+8$

(9) $(x^2+3)^2-3(x^2+3)+2$

(10) $2(x-1)^2+9(x-1)-5$



因数分解 2 練習問題 b



3 置き換えて乗法公式を 2 回使用

※計算過程を必ず書くこと。

(1) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$

(2) $(a^2+5a)^2+10(a^2+5a)+24$

(3) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

(4) $(2x^2+3x)^2-3(2x^2+3x)-4$

(5) $(a^2+25)^2-100a^2$

(6) $(x^2+2x)^2-23(x^2+2x)+120$

(7) $(x^2-5x)^2-40(x^2-5x)+384$

(8) $(4x^2+9y^2)^2-144x^2y^2$



● GUIDANCE

因数分解の主な3つの解法をもう一度確認します。

- ① 式全体を共通因数で「くくり出す」
- ② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」
- ③ 乗法公式を利用する

問題を見たら、まず①→②→③の順で確認します。

もう少し詳しくすると、次のようになります。

②を行ったあとに、また①にもどって再確認。③を行ったあとに、また①にもどって再確認。

例： $x^2+2x+1-y^2$

① 式全体を共通因数で「くくり出す」ことから考えます。共通因数がありません。

② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」ことを考えます。

y は項が一つしかありません。2つある x に着目して前の2項をくくってみます。

$$\begin{aligned} & x^2+2x+1-y^2 \\ & =x(x+2)+1-y^2 \end{aligned}$$

進みました。次に、残った「 $1-y^2$ 」で何かできそうな予感すればグッド！

③ 乗法公式を利用することを考えます。式全体では乗法公式を利用できません。どうしましょう。「部分的に乗法公式を利用する」です。

後ろの2項は乗法公式 $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ を利用できる形をしていますね。

$$\begin{aligned} & x(x+2)+1-y^2 \\ & =x(x+2)+(1+y)(1-y) \end{aligned}$$

もう少し、ですね。

ここから、① ② ③を改めてチェックします。

① 共通因数…ありません。 ② 部分的に因数分解…できません。 ③ 乗法公式…使えません。

これ以上変形できません。

しかし、まだ「多項式の積」の形になっていない（カッコの外にプラスが残っている）ので、因数分解をしたとはいえません。ゲームオーバー？

そこで、① 式全体を共通因数で「くくり出す」の後にもどります。

そして② 1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」とばし、

③ 乗法公式を利用することを考えます。しかし、式全体では乗法公式を利用できません。

そこで、先ほどの「部分的に乗法公式を利用する」ことを考えます。

もう一度、式をよく見て、どこかに乗法公式を使えそうな部分がないか、探します。

前の3項「 x^2+2x+1 」です。

乗法公式 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ を利用できます。 $2 \times 1 = 2$, $1^2 = 1$ となるので、

$$\begin{aligned} & x^2+2x+1-y^2 \\ & =(x+1)^2-y^2 \end{aligned}$$

と、式変形ができました。

もう少しかもしれません。よく見てください。



あっ…見えたかも。何だっけ…！

…(〇き換え…だよ) ヒソヒソ

置き換え、です！

例題 2と同様に、多項式は、1つの文字に置き換えることで因数分解を進めやすくなります。「 $x+1$ 」を「 A 」と置き換えます。見えませんか？

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - y^2 \\ = A^2 - y^2\end{aligned}$$

またまた、手順に沿ってチェックします。今はめんどうがらずについてきてください。

- ① 共通因数…ありません。 ② 部分的にくくり出す…できません。
③ 乗法公式…使えますね。 乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ が利用可能です。

$$\begin{aligned}A^2 - y^2 \\ = (A+y)(A-y)\end{aligned}$$

ほら、できました。「多項式の積」の形です。因数分解はこれで終了！

おっと。「 A 」は因数分解のために私たちが勝手に置いた文字でしたね。解答に残してはいけません。そこで、 A を元にもどします。

$$\begin{aligned}(A+y)(A-y) \\ = (x+1+y)(x+1-y)\end{aligned}$$

これも「多項式の積」の形になっています。

カッコの外に「足し算・引き算」記号は残っていません。因数分解はこれで完了です。

※参考 $(x+1+y)(x+1-y)$ は、文字を持つ項から順番に並べて、 $(x+y+1)(x-y+1)$ と書くことが一般的です。もちろん、 $(x+1+y)(x+1-y)$ でも誤りではありません。

きゃっほう！ 見えました！ できました！
何か…天からのささやき、みたいな…聞こえた気がして「置き換え」ができました！



(ま、黙っておこう…)

おきかえに気がついたとは、いいね。慣れてくると「これ、置き換えられるかも」「これ、部分的に乗法公式？」って見えるんだ。



はい。よくわかりましたっ！ で、もっと新しくて便利な方法はないんですか？ 今ならそれだって使えそうな気がします！



素晴らしいね。ただ、もう解き方は全部教えた。この後は、複雑なものを数多く解きながら、自力で「見える」ようにすることだよ。きっとできる。



「自力で」…？ ん？
(もうできるのに…。何か気になるな…ま、いいか)
はい、がんばって続けます！



では、例題に進みます！

4 前 3 項 or 後 3 項で因数分解

$$9a^2 - b^2 - 4bc - 4c^2$$

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので、次へ進む。

② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

$$\text{中央 2 項を } b \text{ でくくる } -b(b+4c)+9a^2-4c^2$$

③乗法公式を利用する（部分的に）

後ろ 2 項を、乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ を利用して因数分解

$$-b(b+4c)+9a^2-4c^2 = -b(b+4c) + (3a+2c)(3a-2c)$$

ここから改めて①，②，③の手順を踏んでもこれ以上の計算はできず，これは，多項式の積の形になっていないので因数分解をしたとはいえない。一度もどって② 1 つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

$$\text{後ろ 2 項を } 4c \text{ でくくる } 9a^2 - b^2 + 4c(-b-c)$$

③乗法公式を利用する（部分的に）

前 2 項を、乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ を利用して因数分解

$$9a^2 - b^2 + 4c(-b-c) = (3a+b)(3a-b) + 4c(-b-c)$$

ここから改めて①，②，③の手順を踏んでもこれ以上の計算はできず，これも，多項式の積の形になっていないので因数分解をしたとはいえない。

②の手順は諦めて、次に進む。

③乗法公式を利用する

式全体として乗法公式を利用することができないが，後ろ 3 項を使うと乗法公式が利用できそうな形になっている。

$$\text{はっきりさせるため，後 3 項を } - \text{ でくくる } 9a^2 - (b^2 + 4bc + 4c^2)$$

これで，乗法公式を利用する形が見えたので，くくった後ろ 3 項について，乗法公式 $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ を利用して因数分解

$$9a^2 - (b^2 + 4bc + 4c^2) = 9a^2 - (b+2c)^2$$

多項式は，1 つの文字に置き換える。今回は， $b+2c=A$ とする

$$9a^2 - (b+2c)^2 = 9a^2 - A^2$$



因数分解2 例題 c



改めて、①の手順から確認。

①式全体を共通因数で「くくり出す」

全体で共通因数になるものは存在しないので、次へ進む。

②1つの文字に着目して部分的に「くくり出す」

部分的にくくり出しても「多項式の積」をつくり出すことができないので、次へ進む。

③乗法公式を利用する

今回は、乗法公式 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ を利用可能なので、

$$9a^2 - A^2 = (3a+A)(3a-A)$$

因数分解はこれで終了。ただし、 A は勝手に置いた文字なので、 A を元に戻す。

$$(3a+A)(3a-A) = \{3a+(b+2c)\}\{3a-(b+2c)\} = (3a+b+2c)(3a-b-2c)$$

「多項式の積」の形になっているので、無事に因数分解完了。

◇トレーニング◇

下の【解答の過程】は、 $x^2 - y^2 - 4y - 4$ を因数分解した様子である。(*)以降の解答の続きを書きなさい。

【解答の過程】

$$x^2 - y^2 - 4y - 4$$

$$= x^2 - (y^2 + 4y + 4)$$

$$= x^2 - (y+2)^2$$

$$y+2=A \text{ と置くと } \dots(*)$$

$$\text{解 } y+2=A \text{ と置くと } \dots x^2 - A^2$$

$$= (x+A)(x-A)$$

$$= \{x+(y+2)\}\{x-(y+2)\}$$

$$= (x+y+2)(x-y-2)$$



因数分解2 練習問題 c



4 前3項 or 後3項で因数分解 ※計算過程を必ず書くこと。

(1) $a^2+2ab+b^2-c^2$

(2) $x^2-12x+36-y^2$

(3) $4x^2-y^2+2y-1$

(4) $4x^2-y^2+6y-9$

(5) $4x^2+4x+1-y^2$

(6) $25x^2-a^2+8a-16$

(7) x^2-y^2-4y-4

(8) $a^2+6a+9-4b^2$