例題 14　期待値

黒玉4個と白玉3個が入っている箱の中から3個の玉を同時に取り出すとき，取り出される白玉の個数の期待値を求めよ．

解　取り出される白玉の個数をXとすると，Xのとりうる値は0，1，2，3である．
Xがそれぞれの値をとるときの確率を求めると，

$X=0$ のとき，$\dfrac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{4}{35}$　　$X=1$ のとき，$\dfrac{{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_7C_3}=\dfrac{18}{35}$

$X=2$ のとき，$\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\dfrac{12}{35}$

$X=3$ のとき，$\dfrac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{1}{35}$

X	0	1	2	3	計
確率	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

よって，求める期待値は，$0\cdot\dfrac{4}{35}+1\cdot\dfrac{18}{35}+2\cdot\dfrac{12}{35}+3\cdot\dfrac{1}{35}=\dfrac{45}{35}=\boldsymbol{\dfrac{9}{7}}$

51　25本のくじの中に当たりくじが5本ある．このくじを3回続けて引いたときの当たりくじの本数の期待値を求めよ．ただし，引いたくじはそのつどもとに戻すものとする．

52　ジョーカーを除いた52枚のトランプから同時に2枚を引くとき，その中のエースの枚数の期待値を求めよ．

53　赤玉が3個，白玉が6個入っている袋の中から，玉を1個ずつ，もとに戻さずに3個続けて取り出すとき，取り出された赤玉の個数の期待値を求めよ．

54　箱の中に1のカードが1枚，2のカードが2枚，3のカードが3枚，4のカードが4枚入っている．この中から1枚のカードを引いてその数を読み，それをもとに戻してから再び1枚を引いてその数を読む．このとき，2つの数の和の期待値を求めよ．

55　袋の中に赤玉4個，白玉6個が入っている．この中から玉を1個ずつ取り出していき，白玉が出たら玉を取り出すのをやめる．このとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

●ポイント

①　試行の結果によってその値が定まる変数Xがあり，Xのとりうる値がx_1，x_2，…，x_nとして，それぞれの値をとる確率がp_1，p_2，…，p_nであるとき，

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

を，変数Xの**期待値**という．

X	x_1	x_2	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	……	p_n	1

例題 15　期待値の利用

コインを４回投げて，表の出た枚数だけ100円硬貨をもらえるゲームがある．このゲームの参加料が180円のとき，このゲームに参加するのは得であるか，損であるかを答えよ．

解　もらえる金額の期待値が参加料より大きければ参加するのは得，小さければ参加するのは損と判断する．

もらえる金額をXとすると，Xのとりうる値は０，100，200，300，400である．

コインを１回投げるとき，表が出る確率は$\frac{1}{2}$だから，Xがそれぞれの値をとるときの確率は，

$X=0$ のとき，${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{{}_4C_0}{2^4}=\frac{1}{16}$　同様にして，$X=100$ のとき，$\frac{{}_4C_1}{2^4}=\frac{4}{16}$

$X=200$ のとき，$\frac{{}_4C_2}{2^4}=\frac{6}{16}$　$X=300$ のとき，$\frac{{}_4C_3}{2^4}=\frac{4}{16}$　$X=400$ のとき，$\frac{{}_4C_4}{2^4}=\frac{1}{16}$

このゲームでもらえる金額の期待値は，

$0\cdot\frac{1}{16}+100\cdot\frac{4}{16}+200\cdot\frac{6}{16}+300\cdot\frac{4}{16}+400\cdot\frac{1}{16}$

$=200$（円）

X	0	100	200	300	400	計
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

参加料より大きいから，参加するのは**得**である．

56　赤玉２個，白玉３個，黒玉４個が入っている袋から玉を１個取り出し，赤玉が出たら400円，白玉が出たら150円もらえ，黒玉が出たら200円を支払うゲームがある．このゲームに参加することは得であるか，損であるか答えよ．

57　６枚のカード$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$が入っている箱から同時に２枚のカードを取り出し，カードに書かれている２つの数の和の50倍の賞金がもらえるゲームがある．ゲームの参加料が400円のとき，このゲームに参加するのは得であるか，損であるか答えよ．

58　当たりくじ４本を含む10本のくじから，同時に３本を引くとき，当たりくじ１本について100円もらえるゲームがある．参加料が100円のとき，このゲームに参加するのは得であるか，損であるか答えよ．

59　A，B２人が１個のさいころを２回ずつ投げ，出る目の数の差の絶対値が小さい方が賞金900円をもらい，引き分けなら450円ずつもらえるゲームがある．ところが，１回目にAが３，Bが５の目を出したところで停電になり，ゲームを中止した．このままゲームを続行するとしたときの，A，Bそれぞれがもらえる賞金額の期待値を求めよ．

●ポイント

①　ゲームに参加するのが得であるか損であるかは，受けとる金額の期待値と，参加料のどちらが大きいかによって判断する．

混 合 問 題

A

1 A，B，C，D 4 人の学生が，ある資格試験に合格する確率はそれぞれ$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$であるという．

(1) ちょうど 1 人だけ合格する確率を求めよ．

(2) 少なくとも 2 人が合格する確率を求めよ．

2 あるゲームでAがBに勝つ確率はつねに一定で$\frac{2}{3}$とする．A，Bがゲームをし，先に 3 ゲーム勝った方を優勝とする．ただし，引き分けはないものとする．

(1) 3 ゲーム目で優勝が決まる確率を求めよ．

(2) 4 ゲーム目までしてAが優勝する確率を求めよ．

(3) 5 ゲーム目までしてAが優勝する確率を求めよ．

3 箱の中に 1 のカードが 1 枚，2 のカードが 2 枚，3 のカードが 3 枚，4 のカードが 4 枚入っている．この中から 1 枚ずつ続けて 3 枚のカードを取り出してその数を読む．ただし，取り出したカードはもとに戻さないものとする．

(1) 3 枚目に取り出したカードの数が 3 である確率を求めよ．

(2) 3 枚のカードの数がすべて同じとなる確率を求めよ．

(3) 3 枚のカードの数の和が10となる確率を求めよ．

B

4 A，Bの 2 人が硬貨を投げる．Aは 4 回，Bは 5 回投げるものとする．

(1) Aが表を 3 回出し，Bが表を 2 回出す確率を求めよ．

(2) Aが表を出す回数よりもBが表を出す回数の方が多い確率を求めよ．

5 4 人でじゃんけんを 1 回するとき，次の確率を求めよ．

(1) 1 人だけが勝つ確率

(2) あいこになる確率

6 5 回に 1 回の割合でかさを忘れてくるくせのあるK君が，A，B，Cの 3 軒をこの順に訪問して家に帰ったとき，かさを忘れてきたことに気付いた．2 番目の家Bに忘れてきた確率を求めよ．

■ヒント

6 A，B，Cのどこかに忘れてくるという事象をE，Bに忘れてくるという事象をFとすると，求める確率は$P_E(F)$である．まず，$P(E)$を余事象の確率を利用して求める．

章末問題 A

1 Uを全体集合とし，その部分集合をA，Bとする．$n(U)=100$，$n(A\cup B)=90$，$n(A\cap B)=20$，$n(A\cap\overline{B})=30$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $n(A)$　　(2) $n(B)$　　(3) $n(\overline{A}\cap B)$　　(4) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

2 7個の数字 0，1，2，3，4，5，6 から，異なる 4 個の数字を取って並べ，4 桁の整数をつくるとき，偶数は何個できるか．

3 大人 6 人と子供 6 人が丸いテーブルについて食事をするとき，大人と子供が交互に並ぶ座り方は何通りあるか．

4 5 個の異なる箱に，異なる 4 個の玉をかってに入れるとすると，何通りの入れ方があるか．

5 次の問いに答えよ．

(1) 男子10人，女子10人から 4 人を選ぶとき，少なくとも男子が 1 人含まれる場合は何通りあるか．

(2) 15人を 5 人，5 人，5 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか．

6 袋の中に赤玉 5 個，青玉 8 個，白玉 7 個が入っている．この中から 3 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ．

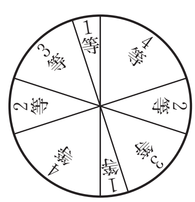
(1) 赤玉が 2 個以上出る確率

(2) 玉の色が 2 色以上となる確率

7 1 枚のコインを 7 回投げるとき，7 回目に，ちょうど 3 回目の表が出る確率を求めよ．

8 5 題のうち 3 題以上解いた生徒を合格とする試験がある．4 題のうち平均して 3 題解ける生徒がこの試験に合格する確率を求めよ．

9 右のような半径 1 の円で作ったルーレットを使ったゲームがある．参加料が200円で，1 等を当てると600円，2 等を当てると300円，3 等を当てると150円，4 等を当てると100円がもらえる．1 等，2 等，3 等，4 等それぞれの中心角の大きさの比が 1：2：3：4 のとき，このゲームに参加するのは得であるか，損であるか答えよ．ただし，1 等，2 等，3 等，4 等それぞれが当たる確率の比は，それぞれの面積比に等しいものとする．



章末問題 B

1 300以下の自然数のうち，次のような数はいくつあるか．

(1) 3，5，7のうち，少なくとも1つで割り切れる数

(2) 3でも5でも7でも割り切れない数

(3) 3では割り切れるが，5でも7でも割り切れない数

2 赤玉5個，白玉3個，黄玉2個，青玉1個を円形に並べる方法は何通りあるか．

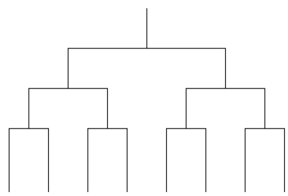
3 nを3以上の自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) n人をA，B，Cの3つの部屋に入れる方法は何通りあるか．ただし，空になる部屋があってもよい．

(2) n人をA，B，Cの3つの部屋のうちの2つに入れる方法は何通りあるか．

(3) n人を3つの組に分ける方法は何通りあるか．

4 8人のレスラーがトーナメント戦を行う．次の問いに答えよ．



(1) 異なる組合せ方法は何通りあるか．

(2) 8人には実力差があり，試合ではつねに実力上位の者が勝つと想定する．このとき，実力3位の者が決勝戦に進出するような組合せ方法は何通りあるか．

5 袋Aには赤玉2個，白玉3個が入っていて，袋Bには赤玉2個，白玉2個が入っている．袋Aから1個の玉を取り，赤白を確認したあと，その玉を袋Bに入れる．次に，袋Bから1個の玉を取り，赤白を確認したあと，その玉を袋Aに入れる．以上を1回の試行とする．

(1) 1回の試行の後，袋Aに赤玉が2個，白玉が3個入っている確率を求めよ．

(2) 2回の試行の後，袋Aに赤玉がなくなる確率を求めよ．

6 4個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の和が9以下になる確率を求めよ．

7 9個の白玉と1個の赤玉の入った袋Aと，8個の白玉と2個の赤玉の入った袋Bがある．コインを投げて表が出たらAの袋から玉を1個取り出し，裏が出たらBの袋から玉を1個取り出す．取り出した玉はもとに戻さず，続けて同じようにして玉を取り出す．こうして，2個の玉を取り出す．

(1) 1回目に赤玉を取り出す確率を求めよ．

(2) 1回目と2回目に赤玉を続けて取り出す確率を求めよ．

(3) 2個の玉のうち少なくとも1個が赤玉であったという条件の下で，1回目のコインが表であった確率を求めよ．