

## ～背理法とは

みなさんが中学校の数学でならう証明の代表的なものは、図形分野における合同や相似の証明です。これらの証明は「AならばB, BならばC, CならばD, よってAならばDである。」というふうに、いろいろな定義や定理を根拠にして論理を積み重ねていき、仮定から結論へストレートにたどり着く証明方法です。このような証明方法は“直接証明”とって比較的分かりやすい、ふつうの証明方法です。

しかし中には直接証明ではうまく証明できないことがらもあって、そんなときに役に立つ証明方法の1つに背理法があります。

背理法による証明は、あることがらPを示すのに、「Pが成り立たないと仮定し、そうすると矛盾が起こることを導く」ことにより、Pが成り立つことを証明する手法です。つまり、矛盾が生じたのはPが成り立たないとしたはじめの仮定が誤りであり、すなわちPは成り立つのである、という論法です。この手法を、直接証明に対して“間接証明”といいます。いくつか例を見てみましょう。

### ～背理法による証明

#### ①素数が無限にあることの証明

素数が有限個しかないと仮定する。

その個数をn個とし、すべての素数を小さい順にならべ、

それらを $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots, p_n$ とする。

( $p_n$ は最大の素数である・・・①)

このとき、

$$Q = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times p_5 \times \dots \times p_n + 1$$

という数Qを考える。

すると、

Qの形より、Qは素数である・・・どの素数( $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots, p_n$ )でわっても1あまるから。

また、①より、Qは素数ではない・・・最大の素数より大きいから。

よって、矛盾。

したがって、はじめの仮定が誤りであったことになり、素数は無限にある。

※素数・・・1とその数自身しか約数のない数を素数という。(1はのぞく)

素数が有限個しかないとする

↓

最大の素数を $p_n$ とする

↓

最大の素数 $p_n$ より大きな素数

Qが存在してしまう

↓

矛盾

↓

素数は無限にある

## ～背理法による証明

### ② $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

$\sqrt{2}$  が有理数であると仮定する。

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \cdots \textcircled{1}$$

とおける。

ただし、①の右辺は約分できるまで約分し、

$m, n$  は互いに素(1以外に公約数をもたない)な自然数とする。

(このような分数を既約分数という。)

①の両辺を2乗すると、

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2, 2m^2 = n^2 \cdots \textcircled{2}$$

②より、 $n$  は偶数(2乗して偶数になる自然数は偶数)。

よって  $n = 2k$  とおける( $k$  は自然数)。

②に代入すると、

$$2m^2 = 4k^2, m^2 = 2k^2 \cdots \textcircled{3}$$

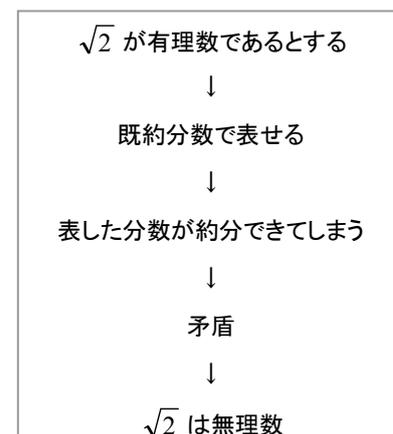
③より、 $m$  は偶数。

$n$  も偶数で  $m$  も偶数であることは(2で約分できるので)、 $n$  と  $m$  が互いに素であるという最初の仮定と矛盾する。

したがって、 $\sqrt{2}$  は無理数である。

#### ※有理数と無理数

…2つの整数の商の形(割る数は0ではない)で表せる数を有理数といい、有理数でない数を無理数という。



## ～あやまった背理法の使い方

### ③イルカが哺乳類であることの証明

イルカは魚類であると仮定する…①

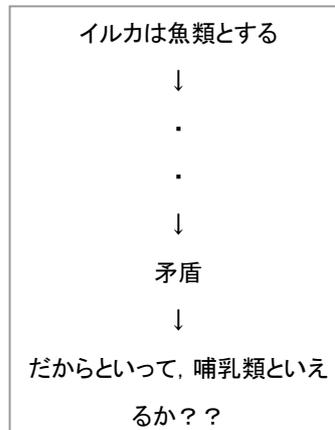
魚類はエラ呼吸する…②

よって、①、②より、イルカはエラ呼吸する。

しかし、じっさいイルカは肺呼吸をする動物でエラ呼吸はできない。

よって、矛盾。

最初の仮定は誤りだから、イルカは哺乳類である。





<答え>

$\sqrt{2} + 3$  が有理数であると仮定する。

$$\sqrt{2} + 3 = \frac{n}{m} \cdots \textcircled{1} \quad \text{とおける。}(n, m \text{ は自然数})$$

①を変形すると、

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} - 3 \cdots \textcircled{2}$$

②において、左辺は無理数、右辺は有理数であるから、矛盾。  
よって、最初の仮定は誤りであり、 $\sqrt{2} + 3$ は無理数である。