期待値

「どっちを買ったら得か？」というのは，皆さんが買い物などをするときに日常的に考えることだと思います。
今回は，このような日常的な疑問について，確率の考えが利用できる例を考えてみます。

「ニコニコ市場」と「ワクワク市場」の2つの市場があり，それぞれ次のような福引を実施しています。

ニコニコ市場(福引の本数：1000 本)

賞	1等	2等	3等	はずれ
賞金	10000円	5000円	1000円	0円
本数	50本	150本	300本	500本

ワクワク市場(福引の本数：1000 本)

賞	1等	2等	3等	はずれ
賞金	30000円	10000円	2000円	0円
本数	10本	40本	200本	750本

1 等の賞金だけ見ると，「ワクワク市場」の方が高いですね。でも，実際はどちらの市場の福引の方が得なのでしょうか？

これを調べるために，福引を 1 回したときの賞金の平均，すなわち，『（賞金額の合計）÷(福引の本数の合計)』を求めて比べてみましょう。

・ニコニコ市場の場合は，$\dfrac{10000\times50+5000\times150+1000\times300+0\times500}{1000}$ ＝1550(円)……①

・ワクワク市場の場合は，$\dfrac{30000\times10+10000\times40+2000\times200+0\times750}{1000}$ ＝1100(円)……②

上の①，②で求めた金額は，それぞれ，『福引1本あたりに期待できる賞金額』ということになります。

このような値を**期待値**といいます。

上の結果から，福引1本あたりの賞金額，すなわち，期待値が大きいのは「ニコニコ市場」ですから，こちらの福引の方が「ワクワク市場」の福引よりも得であると結論できます。

また，①の式は次のように変形することもできます。

$$10000\times\frac{50}{1000}+5000\times\frac{150}{1000}+1000\times\frac{300}{1000}+0\times\frac{500}{1000}=1550(\text{円})$$

この式の $\dfrac{50}{1000}$，$\dfrac{150}{1000}$，$\dfrac{300}{1000}$，$\dfrac{500}{1000}$ はそれぞれ福引の 1 等，2 等，3 等，はずれが出る確率にあたります。

このことから，期待値は次のように考えても求められることがわかります。

『(1 等の賞金額)×(1 等の確率)＋
(2 等の賞金額)×(2 等の確率)＋
(3 等の賞金額)×(3 等の確率)＋
(はずれの賞金額)×(はずれの確率)』

つまり，賞金額の合計を求めなくても確率がわかれば期待値は求められるのです。

〔例〕

あるくじがあり，このくじを 1 本ひくとき，1 等，2 等，3 等，4 等，はずれが出る確率とそれらに対応する賞金額は下の表のようになっている。

賞	1 等	2 等	3 等	4 等	はずれ	計
賞金額	10000 円	2000 円	500 円	100 円	0 円	
確率	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	1

このときの賞金額の期待値は，

$$10000\times\frac{1}{100}+2000\times\frac{1}{25}+500\times\frac{1}{10}+100\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{5}=255(\text{円})$$

期待値はお金に関するものだけとは限りません。一例として，次のような問題を考えてみましょう。

問題　さいころをふり，1 の目が出たら 2 点，2 か 3 の目が出たら 1 点，その他の目が出たら 0 点を得点とするゲームをする。このゲームを 1 回行うときの得点の期待値を求めなさい。

解　各得点に対応する確率を求め，その結果を表にまとめると，次のようになる。

得点	2	1	0	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

よって，得点の期待値は，

$$2\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\ (\text{点})$$

このように，確率をもとにして期待値を計算するほうが一般的です。また，計算が楽になることも多いです。

～練習問題～

1 箱の中に青玉，赤玉，白玉，黒玉が合計 100 個入っていて，それぞれの玉の個数と，玉 1 個あたりの賞金額は次の表のようになっている。

玉の色	青	赤	白	黒	計
個数	4	8	18	70	100
賞金額	1000 円	400 円	100 円	0 円	

この箱の中から玉を 1 個取り出すときの賞金額の期待値を求めなさい。

2 さいころをふり，6 の目が出たら 10 点，1 の目が出たら 4 点，その他の目が出たら－2 点を得点とするゲームをする。
このゲームを 1 回行うときの得点の期待値を求めなさい。

3 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{6}$の 4 枚のカードが入った袋がある。この袋の中から同時に 2 枚を取り出すとき，2 枚のカードに書かれた数の積の期待値を求めなさい。

4 次のようなゲームに参加するのは得か損かを考えてみなさい。

「ジョーカーを除く 52 枚のトランプの中から 1 枚をぬき出し，そのカードがエースなら 800 円もらえ，絵札なら 300 円もらえる。ただし，それ以外のカードをぬき出したときは 200 円はらう。」

〈解答〉

1 $1000\times\frac{4}{100}+400\times\frac{8}{100}+100\times\frac{18}{100}+0\times\frac{70}{100}=$ **90(円)**

2 各得点に対応する確率を求め，その結果を表にまとめると，次のようになる。

得点	10	4	-2	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1

よって，得点の期待値は，

$$10\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+(-2)\times\frac{2}{3}=\mathbf{1}$$ **(点)**

3 2 枚のカードの数の積とそれらに対応する確率を求め，その結果を表にまとめると次のようになる。

積	2	3	6	12	18	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，求める期待値は，

$$2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3}+12\times\frac{1}{6}+18\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{47}{6}}$$

4 各賞金額に対応する確率を求め，その結果を表にまとめると，次のようになる。

賞金額	800 円	300 円	-200 円	計
確率	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{9}{13}$	1

よって，賞金額の期待値は，

$$800\times\frac{1}{13}+300\times\frac{3}{13}+(-200)\times\frac{9}{13}=-\frac{100}{13}\ (円)$$

期待値が負の数になるから，このゲームに参加することは**損である**と考えられる。