ものぐさで行こう

高校になると，式の展開などの計算でも複雑なものが出てきます。しかも，それは最終的な答えを求めるまでの過程の１つにすぎないことがあります。

せっかく問題の本質を理解していても，計算が複雑なために計算ミスをして答えが違ってしまったり，余分な時間を取られてしまうのはもったいない話です。

今回は複雑な計算を楽に，しかも短時間でできる工夫をご紹介します。キーワードは「ものぐさ」です。

ものぐさ計算術①――

$(x^3+2x^2-3x+4)(5x^2+6x-7)$　を展開しなさい。

上の計算は，右のように縦書きの計算をすれば，見通しよく計算できます。しかし，x^5，x^4，x^3などの項をいちいち書くのは意外に時間がかかって面倒です。そこで，「ものぐさ」をし，下のように項を書く手間を省略して係数だけの計算で済ませてしまいましょう。

$$
\begin{array}{r}
x^3+2x^2-3x+4 \\
\times \qquad 5x^2+6x-7 \\
\hline
-7x^3-14x^2+21x-28 \\
6x^4+12x^3-18x^2+24x \qquad \\
5x^5+10x^4-15x^3+20x^2 \qquad\qquad \\
\hline
5x^5+16x^4-10x^3-12x^2+45x-28
\end{array}
$$

		1	2	−3	4
			5	6	−7
		−7	−14	21	−28
	6	12	−18	24	
5	10	−15	20		
5	16	−10	−12	45	−28
5次	4次	3次	2次	1次	定数項

答え……$5x^5+16x^4-10x^3-12x^2+45x-28$

係数と係数の間を少しずつ空けておくのがコツです。

慣れてくると，計算のスピードが全然違ってきます。

実際に試してみましょう！

問題１　$(x^3-3x^2-6x+2)(2x^2-5x+8)$　を展開しなさい。

ものぐさ計算術②(多項式の除法)――――――――――――――――――――――――――――――――――――――

> $A=x^4+x^3+2x^2-3x+2$，$B=x^2+2x-1$　のとき，
> AをBで割った商と余りを求めなさい。

この計算は，ふつう右のように割り算をすれば，
　商……x^2-x+5，余り……$-14x+7$
と求まりますが，これも「ものぐさ」をして，下のように係数だけの計算で済ますことができます。

$$
\begin{array}{rrrr|rrrrr}
 & & & & 1 & -1 & 5 & & \\
\hline
1 & 2 & -1 &) & 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\
 & & & & 1 & 2 & -1 & & \\
\hline
 & & & & & -1 & 3 & -3 & \\
 & & & & & -1 & -2 & 1 & \\
\hline
 & & & & & & 5 & -4 & 2 \\
 & & & & & & 5 & 10 & -5 \\
\hline
 & & & & & & & -14 & 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+5 \\
\hline
x^2+2x-1\ ) & x^4+x^3+2x^2-3x+2 \\
 & x^4+2x^3-x^2 \\
\hline
 & \quad -x^3+3x^2-3x \\
 & \quad -x^3-2x^2+x \\
\hline
 & \qquad\quad 5x^2-4x+2 \\
 & \qquad\quad 5x^2+10x-5 \\
\hline
 & \qquad\qquad -14x+7
\end{array}
$$

$\boxed{\text{問題２}}$　$A=x^4-3x^3+2x^2-4x-5$，$B=x^2+x-3$　のとき，
AをBで割った商と余りを求めなさい。

???????????????????????????????????????

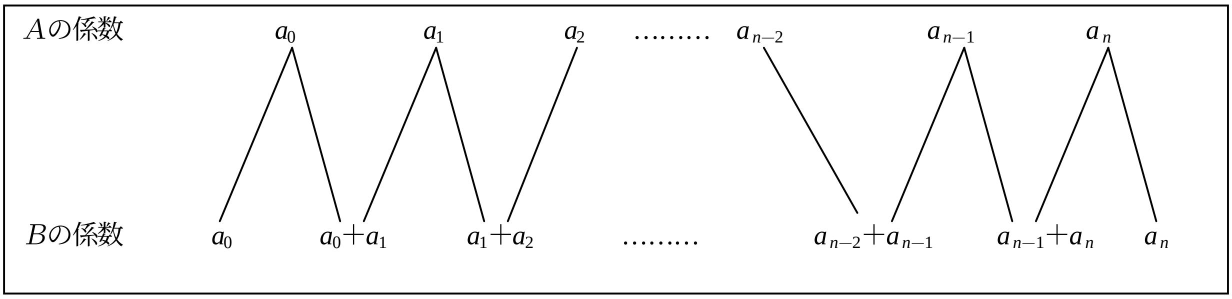
ここで，また違ったタイプの「ものぐさ」を考えてみましょう。

「$A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$」と「$x+1$」の積を$B$とすると，

$$
\begin{aligned}
B&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n)(x+1)\\
&=a_0x^{n+1}+a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-2}x^3+a_{n-1}x^2+a_nx\\
&\qquad+a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n\\
&=a_0x^{n+1}+(a_0+a_1)x^n+(a_1+a_2)x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+(a_{n-2}+a_{n-1})x^2+(a_{n-1}+a_n)x+a_n
\end{aligned}
$$

となります。

ここで，多項式Aと多項式Bの係数の間に下の図のような関係が成り立っていることがわかります。



よって，多項式Bの係数は，多項式Aの係数をもとに，次のようにして求められます。

① **最高次の係数と定数項はそのまま**

② **その他の係数は，もとの式の隣り合う項の係数の和になる**

上のことを利用すると次のように $x+1$ がからむ式の展開が簡単にできます。

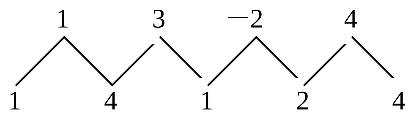
ものぐさ計算術③――

$(x^3+3x^2-2x+4)(x+1)$　を展開しなさい。

解　右の計算より，

$(x^3+3x^2-2x+4)(x+1)$

$=x^4+4x^3+x^2+2x+4$

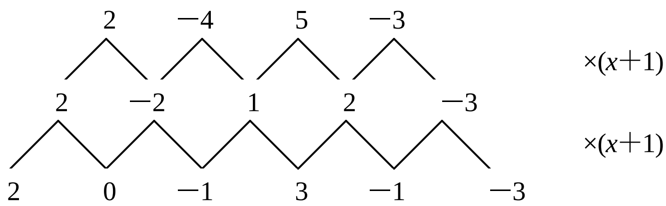


$(2x^3-4x^2+5x-3)(x+1)^2$　を展開しなさい。

解　右の計算より，

$(2x^3-4x^2+5x-3)(x+1)^2$

$=2x^5-x^3+3x^2-x-3$



問題３　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x^3-7x^2-6x+5)(x+1)$

(2)　$(2x^4-x^3-3x^2+4x-2)(x+1)^2$

解答

問題１の解答

右の計算より，

$(x^3-3x^2-6x+2)(2x^2-5x+8)$

$=2x^5-11x^4+11x^3+10x^2-58x+16$

		1	−3	−6	2
			2	−5	8
		8	−24	−48	16
	−5	15	30	−10	
2	−6	−12	4		
2	−11	11	10	−58	16

問題２の解答

右の計算より，

$A=x^4-3x^3+2x^2-4x-5$　を

$B=x^2+x-3$　で割ると，

商……x^2-4x+9，余り……$-25x+22$

			1	−4	9		
1	1	−3)	1	−3	2	−4	−5
			1	1	−3		
				−4	5	−4	
				−4	−4	12	
					9	−16	−5
					9	9	−27
						−25	22

問題３の解答

(1)　右の計算より，

$(x^3-7x^2-6x+5)(x+1)$

$=x^4-6x^3-13x^2-x+5$

	1		−7		−6		5	
1		−6		−13		−1		5

(2)　右の計算より，

$(2x^4-x^3-3x^2+4x-2)(x+1)^2$

$=2x^6+3x^5-3x^4-3x^3+3x^2-2$

		2		−1		−3		4		−2		
	2		1		−4		1		2		−2	
2		3		−3		−3		3		0		−2