ドーナツの体積を求めよう

＜回転体＞

右の図１のような正方形を直線 l のまわりに１回転させると，図２のような円柱ができます。

この円柱において，

底面の面積は，$\pi \times 2^2 = 4\pi$ (cm²)，

高さは 2cm なので，

円柱の体積＝底面の面積×高さ　より，

体積は，$4\pi \times 2 = 8\pi$ (cm³) となります。

図１

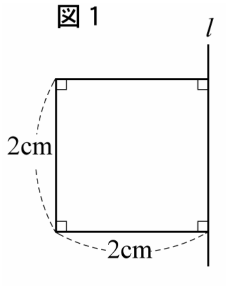
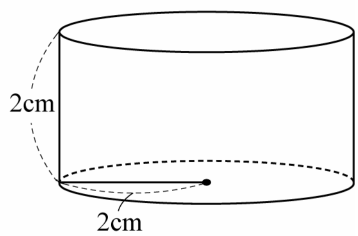


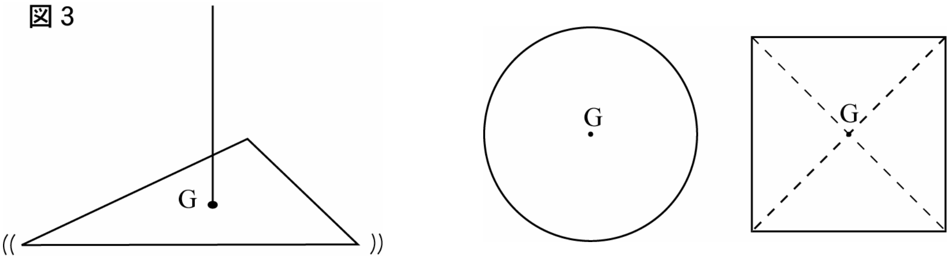
図２



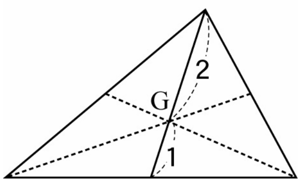
このように，回転体の体積を求めることは中学１年で学習しますが，上の方法とまったくちがう求め方があります。その方法を紹介しましょう。

下の図３のように，平面図形をつり下げたとき，その平面図形が水平になってつりあうような点を重心（じゅうしん）といい，しばしば「G」（“gravity＝重力”の頭文字）という文字で表されます。この重心の位置は図形によっていろいろで，円の場合はその中心，正方形や長方形の場合は対角線の交点になります。

図３



特に三角形では，重心は１つの頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分を２：１に分ける点になります。



驚くべきことに，ある平面図形を直線のまわりに回転してできる立体の体積は，

（その図形の面積）×（重心がえがく円の周の長さ）

で求めることができるのです（重心は，直線のまわりを１回転させると円をえがきます）。

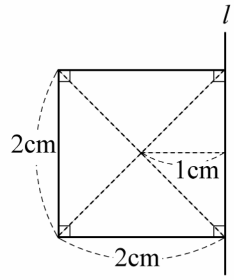
このことを用いると，上の図１において，

正方形の面積は，$2 \times 2 = 4$ (cm²) で，

重心（対角線の交点）がえがく円周の長さは，$2\pi \times 1 = 2\pi$ (cm) なので，

この正方形を回転させてできる立体の体積は，

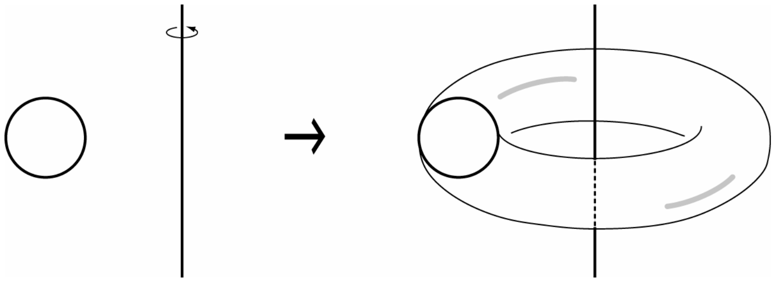
$4 \times 2\pi = 8\pi$ (cm³) と求めることができます。



＜ドーナツの体積＞

さて，いよいよ本題に入りましょう。ドーナツ形は下の図のように，円を直線のまわりに１回転させてできた立体と考えることができます（数学の世界では，円環体（えんかんたい）またはトーラスと呼ばれています）。

円の重心はその中心と一致するので，もとの円の半径と，円の中心と直線との距離がわかれば，ドーナツ形の体積を求めることができます。

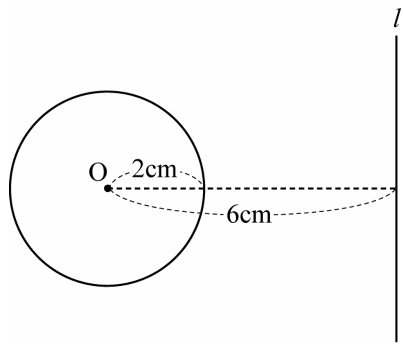


例えば，右の図のように，半径が２㎝で，中心と直線 l との距離が６㎝である円を，直線 l のまわりに１回転させてできるドーナツ形の体積は，

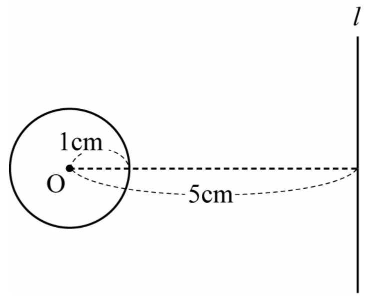
円の面積$=\pi\times2^2=4\pi$（㎠），

中心Ｏがえがく円周の長さ$=2\pi\times6=12\pi$（㎝）

より，$4\pi\times12\pi=48\pi^2$（㎤）となります。



＜問題に挑戦★＞　右の図のような，半径が１ cm で，中心と直線 l との距離が５ cm である円を，直線 l のまわりに１回転させてできるドーナツ形の体積を求めましょう。



解.　 円の面積$=\pi \times 1^2 = \pi\ (cm^2)$，中心Oがえがく円周の長さ$= 2\pi \times 5 = 10\pi\ (cm)$
より，求める体積は，$\pi \times 10\pi = 10\pi^2 (cm^3)$。

答．$10\pi^2 (cm^3)$